$\mathcal{N} = 4$ Supergravitation einer T^2 - kompaktifizierten sechsdimensionalen Theorie

Christoph Köhn

26. April 2010

Einführung
- QFT vs. ART
- Strings und dimensionale Reduktion
- Einschub: Supersymmetrie
- Supergravitation

Reduktion der sechsdimensionalen Theorie
- Startpunkt in 6 Dimensionen
- Reduktion der masselosen Theorie
- Reduktion der massiven Theorie

Vergleich mit allgemeiner Theorie
- Allgemeine masselose $\mathcal{N} = 4, D = 4$ Supergravitation
- Dualisierungen
- Allgemeine massive $\mathcal{N} = 4, D = 4$ Supergravitation
- Bestimmung von $f_{\alpha MNP}$ und $\xi_{\alpha M}$

Zusammenfassung und Ausblick
- Zusammenfassung
- Ausblick

QFT vs. ART

Zwei fundamentale Theorien des 20. Jahrhunderts:

1. Quantenfeldtheorie: kleine Längen, beschreibt Teilchen
2. Allgemeine Relativitätstheorie: große Massen, beschreibt Universum als Ganzes

QFT: Ursprung und Struktur von Materie

ART: Struktur von Raum und Zeit, Geschichte des Universums

QFT vs. ART

Zwei fundamentale Theorien des 20. Jahrhunderts:

1. Quantenfeldtheorie: kleine Längen, beschreibt Teilchen
2. Allgemeine Relativitätstheorie: große Massen, beschreibt Universum als Ganzes

QFT: Heisenbergsche Unbestimmtheit: $\Delta p \cdot \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}$, $\hbar \approx 10^{-34} Js$

ART: Einsteinsche Feldgleichung: $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$

Geometrie der Raumzeit (steckt in der Metrik $g_{\mu\nu}$ sowie dem Riccitensor und Ricciskalar $R_{\mu\nu}, R \sim d^2 g_{\mu\nu}$) und Gravitation (steckt im Energie-Impuls Tensor $T_{\mu\nu}$) hängen voneinander ab.

QFT vs. ART

Zwei fundamentale Theorien des 20. Jahrhunderts:

1. Quantenfeldtheorie: kleine Längen, beschreibt Teilchen
2. Allgemeine Relativitätstheorie: große Massen, beschreibt Universum als Ganzes

Beide Theorien arbeiten gut innerhalb ihrer Grenzen und sind experimentell sehr gut bestätigt, aber:

$\Rightarrow$ Es gibt keine einheitliche Theorie, aus der beide Theorien hergeleitet werden können (Quantengravitation).
notwendig in singulären Situationen: Urknall, schwarze Löcher

Strings

Lösung: Stringtheorie
Idee: Objekte sind nicht punktförmig, sondern ausgedehnt (Strings)

typische Stringlänge: $l_s \approx 10^{-35} m$

Problem: Strings leben in mehr als vier Dimensionen,
typischerweise $D = 10$ oder $D = 26$

Kompaktifizierung und dimensionale Reduktion

Lösung: Zusatzdimensionen sind aufgerollt. Die entsprechenden Mannigfaltigkeiten sind beispielsweise Sphären oder Tori

Um eine vierdimensionale Theorie zu erhalten, muss auf den entsprechenden Mannigfaltigkeiten reduziert werden $\rightarrow$ Kaluza-Klein Reduktion

Wenn man auf einem Torus T^2 reduziert, zerlege sechsdimensionale Koordinaten in $4+2$ Koordinaten:

$$\hat{x}^{\hat{\mu}} := (x^\mu, y^a),\ \hat{x}^{\hat{\mu}} \in M_6,\ x^\mu \in M_4,\ y^a \in T^2,$$

mit $\mu \in \{0, ..., 3\}$ und $a \in \{4, 5\}$

Kompaktifizierung und dimensionale Reduktion

Betrachte z.B. Klein-Gordon Gleichung in sechs Dimensionen, um Spin 0-Teilchen zu beschreiben:

$$(\hat{\Delta} - m_6^2)\hat{\Psi}(\hat{x}) = 0$$

mit $\hat{\Delta} := \partial_{\hat{\mu}}\partial^{\hat{\mu}}$ als sechsdimensionalem Laplaceoperator.

Setze Metrik als blockdiagonal an

$$\rightarrow \hat{\Delta} := \Delta_4 + \Delta_2$$

mit $\Delta_4 := \partial_\mu \partial^\mu$ und $\Delta_2 := \partial_a \partial^a$ als vier- und zweidimensionale Laplaceoperatoren.

Kompaktifizierung und dimensionale Reduktion

Zerlege $\hat{\Psi}$ gemäß

$$\hat{\Psi}(\hat{x}) = \sum_{n_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{+\infty} \Psi_{n_1,n_2}(x) e^{\frac{2\pi i n_1 y^4}{L_1}} e^{\frac{2\pi i n_2 y^5}{L_2}},$$

wobei L_1 und L_2 die Halbachsen des Torus und Ψ_{n_1,n_2} die Fouriermoden von $\hat{\Psi}$ darstellen. Einsetzen in Klein-Gordon Gleichung liefert

$$0 = \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{n_2 \in \mathbb{Z}} (\Delta_4 - m^2_{n_1,n_2}) \Psi_{n_1,n_2}(x) e^{\frac{2\pi i n_1 y^4}{L_1}} e^{\frac{2\pi i n_2 y^5}{L_2}}$$

mit $m^2_{n_1,n_2} := m_6^2 + \left(\frac{2\pi n_1}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{2\pi n_2}{L_2}\right)^2.$

Kompaktifizierung und dimensionale Reduktion

Lineare Unabhängigkeit der Fouriermoden

$$\rightarrow 0 = (\Delta_4 - m^2_{n_1,n_2})\Psi_{n_1,n_2}(x)\ \forall n_i \in \mathbb{Z}, i \in \{1,2\}$$

L_1, L_2 sehr klein $\rightarrow$ sehr massive Teilchen (nicht beobachtbar)

Setze

$$\Psi(x) := \Psi_{0,0}(x) := \hat{\Psi}(x^\mu, y^a)|_{y^a \equiv 0}$$

Genauso sollen auch Vektoren $\hat{A}_{\hat{\mu}}$ und $\hat{B}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ nur von x^μ abhängen.

$\rightarrow$ Ableitungen nach den internen Koordinaten verschwinden.

Einschub: Supersymmetrie

Es existieren zwei “Teilchensorten“: Fermionen und Bosonen

Spin	2	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0
Teilchen	Graviton (?)	Gravitino (?)	Photon $W^{\pm}$, Z^0 Gluon	Lepton Quark	Higgs (?)

→ Fermionen: bauen bekannte Materie auf

→ Bosonen: sind für Wechselwirkung verantwortlich
Supersymmetrische Theorien stellen eine Symmetrie zwischen

Fermionen und Bosonen her.
Wechselwirkungsteilchen der Gravitation: Graviton mit Partner Gravitino

Supergravitation

Supergravitation = klassische, nichtquantisierbare Theorie, die sich aus Stringtheorien ergibt, wenn die Stringlänge $l_s \to 0$ geht.

Theorie enthält bosonischen und fermionischen Charakter (hier nur bosonischer Anteil, fermionischer Anteil kann durch Supersymmetrie hergeleitet werden).

Gemäß der Anzahl $x \in \mathbb{N}$ der Gravitini spricht man auch von $\mathcal{N} = x$ SUGRA

$\mathcal{N}=4, D=6$ SUGRA

$$\begin{aligned}
\hat{S} &= \int_{M_6} d^6\hat{x}\,\sqrt{-\hat{g}}\Big[\frac{1}{4}e^{-2\hat{\Phi}}\Big(-\hat{R}-4\partial_{\hat{\mu}}\hat{\Phi}\partial^{\hat{\mu}}\hat{\Phi}+\frac{1}{3}\hat{H}_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\varrho}}\hat{H}^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\varrho}} \\
&- \frac{1}{8}\partial_{\hat{\mu}}(M^{-1})_{IJ}\partial^{\hat{\mu}}M^{IJ}\Big)+\frac{1}{4}\hat{F}^{I}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}\hat{F}^{\hat{\mu}\hat{\nu}J}(M^{-1})_{IJ}+\frac{1}{2}m^{I}(M^{-1})_{IJ}m^{J}\Big] \\
&+ \int_{M_6} d^6\hat{x}\,\epsilon^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\varrho}\hat{\sigma}\hat{\kappa}\hat{\lambda}}\Big(\frac{1}{8}\hat{B}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}\hat{F}^{I}_{\hat{\varrho}\hat{\sigma}}\hat{F}^{J}_{\hat{\kappa}\hat{\lambda}}L_{IJ}-\frac{1}{8}\hat{B}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}\hat{B}_{\hat{\varrho}\hat{\sigma}}\hat{F}^{J}_{\hat{\kappa}\hat{\lambda}}m^{I}L_{IJ} \\
&+ \frac{1}{6}\hat{B}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}\hat{B}_{\hat{\varrho}\hat{\sigma}}\hat{B}_{\hat{\kappa}\hat{\lambda}}m^{I}L_{IJ}m^{J}\Big)
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
\hat{\Phi} &= \text{Dilaton} \\
\hat{R} &= \text{Ricci-Skalar} \\
\hat{B}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} &= \text{Spin 2-Teilchen} \\
\hat{A}_{\hat{\mu}} &= \text{Vektorteilchen} \\
(M^{-1})_{IJ} &= \text{80 Teilchen parametrisieren diese Matrix.}, I, J \in \{1, ..., 24\}
\end{aligned}$$

$\mathcal{N} = 4, D = 6$ SUGRA

$$
\begin{aligned}
\hat{S} \quad = \quad & \int_{M_6} d^6\hat{x}\, \sqrt{-\hat{g}}\Big[\frac{1}{4}e^{-2\hat{\Phi}}\Big(- \hat{R} - 4\partial_{\hat{\mu}}\hat{\Phi}\partial^{\hat{\mu}}\hat{\Phi} + \frac{1}{3}\hat{H}_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\varrho}}\hat{H}^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\varrho}} \\
- \quad & \frac{1}{8}\partial_{\hat{\mu}}(M^{-1})_{IJ}\partial^{\hat{\mu}}M^{IJ}\Big) + \frac{1}{4}\hat{F}^{I}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}\hat{F}^{\hat{\mu}\hat{\nu}J}(M^{-1})_{IJ} + \frac{1}{2}m^I(M^{-1})_{IJ}m^J\Big] \\
+ \quad & \int_{M_6} d^6\hat{x}\, \epsilon^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\varrho}\hat{\sigma}\hat{\kappa}\hat{\lambda}}\Big(\frac{1}{8}\hat{B}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}\hat{F}^{I}_{\hat{\varrho}\hat{\sigma}}\hat{F}^{J}_{\hat{\kappa}\hat{\lambda}}L_{IJ} - \frac{1}{8}\hat{B}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}\hat{B}_{\hat{\varrho}\hat{\sigma}}\hat{F}^{J}_{\hat{\kappa}\hat{\lambda}}m^I L_{IJ} \\
+ \quad & \frac{1}{6}\hat{B}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}\hat{B}_{\hat{\varrho}\hat{\sigma}}\hat{B}_{\hat{\kappa}\hat{\lambda}}m^I L_{IJ}m^J\Big)
\end{aligned}
$$

Feldstärken:

$$
\begin{aligned}
\hat{H}_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\varrho}} \quad &:= \quad \partial_{\hat{\mu}}\hat{B}_{\hat{\nu}\hat{\varrho}} + \partial_{\hat{\varrho}}\hat{B}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} + \partial_{\hat{\nu}}\hat{B}_{\hat{\varrho}\hat{\mu}}, \\
\hat{F}^{I}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} \quad &:= \quad \partial_{\hat{\mu}}\hat{A}^{I}_{\hat{\nu}} - \partial_{\hat{\nu}}\hat{A}^{I}_{\hat{\mu}} + 2m^I\hat{B}_{\hat{\mu}\hat{\nu}},
\end{aligned}
$$

und Metriken

$$
\begin{aligned}
L_{IJ} \quad &= \quad \text{Metrik mit Signatur } (4,20) \\
\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} \quad &= \quad \text{sechsdimensionale Metrik}
\end{aligned}
$$

$\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ bewegt Indizes, z.B. $\partial_{\hat{\mu}}\hat{\Phi}\partial^{\hat{\mu}}\hat{\Phi} = \hat{g}^{\hat{\mu}\hat{\nu}}\partial_{\hat{\mu}}\hat{\Phi}\partial_{\hat{\nu}}\hat{\Phi}$

Reduktion $m \equiv 0$

Setze alle Massen $m^I \equiv 0$ und erhalte masselose Theorie

$$\begin{aligned}\hat{S}_{m\equiv 0} \quad := \quad & \int\limits_{M_6} d^6\hat{x}\,\sqrt{-\hat{g}}\Big[\frac{1}{4}e^{-2\hat{\Phi}}\Big(-\hat{R}(\hat{x}) - 4\partial_{\hat{\mu}}\hat{\Phi}\partial^{\hat{\mu}}\hat{\Phi} + \frac{1}{3}\hat{H}_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\varrho}}\hat{H}^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\varrho}} \\ - \quad & \frac{1}{8}\partial_{\hat{\mu}}(M^{-1})_{IJ}\partial^{\hat{\mu}}M^{IJ}\Big) + \frac{1}{4}\hat{F}^I_{\hat{\mu}\hat{\nu}}\hat{F}^{\hat{\mu}\hat{\nu}J}(M^{-1})_{IJ}\Big] \\ + \quad & \int\limits_{M_6} d^6\hat{x}\;\epsilon^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\varrho}\hat{\sigma}\hat{\kappa}\hat{\lambda}}\Big(\frac{1}{8}\hat{B}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}\hat{F}^I_{\hat{\varrho}\hat{\sigma}}\hat{F}^J_{\hat{\kappa}\hat{\lambda}}L_{IJ}\Big)\end{aligned}$$

mit Feldstärke

$$\hat{F}^I_{\hat{\mu}\hat{\nu}} \quad := \quad \partial_{\hat{\mu}}\hat{A}^I_{\hat{\nu}} - \partial_{\hat{\nu}}\hat{A}^I_{\hat{\mu}}$$

Reduktion $m \equiv 0$

Setze Metrik an als und

$$\hat{g}^{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \begin{pmatrix} g^{\mu\nu} & -\sqrt{2}h^{ab}V_a^{\mu} \\ -\sqrt{2}h^{ab}V_b^{\nu} & h^{ab} + 2g^{\mu\nu}V_\mu^a V_\nu^b \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned} V_{\mu a} &= \text{Kaluza-Klein Vektorfelder} \\ g^{\mu\nu} &= \text{vierdimensionale Metrik} \\ h^{ab} &= \text{Metrik des Torus } T^2 \end{aligned}$$

Man kann zeigen, dass $\sqrt{-\hat{g}} = \sqrt{-g}\sqrt{h}$.
Reskaliere Metrik des Torus:

$$N_{ab} := h_{ab}e^{\varphi}$$

mit $\det(N_{ab}) \equiv 1$ und neuem Teilchen φ.

Reduktion $m \equiv 0$

Mache folgende Ansätze:

$$\begin{aligned}
\hat{A}^I_{\hat{\mu}} &:= \begin{pmatrix} \tilde{A}^I_\mu \\ A^I_a \end{pmatrix}, \\
\hat{B}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} &:= \begin{pmatrix} \tilde{B}_{\mu\nu} & \tilde{C}_{\mu b} \\ \tilde{C}_{a\nu} & B_{ab} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \tilde{B}_{\mu\nu} & \tilde{C}_{\mu b} \\ \tilde{C}_{a\nu} & b\epsilon_{ab} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

mit Umdefinitionen:

$$\begin{aligned}
F^I_\varrho &:= \tilde{A}^I_\varrho - \sqrt{2} V^d_\varrho A^I_d, \\
C_{\varrho a} &:= \tilde{C}_{\varrho a} + \sqrt{2} V^b_\varrho b\epsilon_{ab}, \\
B_{\varrho\sigma} &:= \tilde{B}_{\varrho\sigma} + \frac{1}{\sqrt{2}} V^a_\varrho C_{\sigma a} - \frac{1}{\sqrt{2}} V^b_\sigma C_{\varrho b} - 2 V^a_\varrho V^b_\sigma b\epsilon_{ab}.
\end{aligned}$$

Reduktion $m \equiv 0$

Definiere Feldstärken

$$\begin{aligned} F^I_{\mu\nu} &:= \partial_\mu F^I_\nu - \partial_\nu F^I_\mu, \\ C_{\mu\nu a} &:= \partial_\mu C_{\nu a} - \partial_\nu C_{\mu a}, \\ V^a_{\mu\nu} &:= \partial_\mu V^a_\nu - \partial_\nu V^a_\mu \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \chi &:= \Phi - \varphi, \\ \Lambda &:= \Phi + \varphi \end{aligned}$$

Spalte Integration auf gemäß

$$\int_{M_6} d^6\hat{x} = \int_{M_4} d^4x \int_{T^2} d^2y \text{mit} \int_{T^2} d^2y \equiv 1$$

$\longrightarrow$ Erhalte komplette reduzierte masselose Theorie

Reduktion $m \equiv 0$

Reduzierte Theorie hat Form

$$S_{m=0} := S_{EH} + S_{ska} + S_1 + S_2 + S_{top}$$

mit

$$S_{EH} = -\frac{1}{4}\int d^4x\sqrt{-g}R(x),$$

$$\begin{aligned} S_1 &= \int d^4x\sqrt{-g}\Big[+ \frac{1}{8}e^{\chi-\Lambda}N_{ab}V^a_{\mu\varrho}V^{\mu\varrho b} \\ &+ \frac{1}{4}e^{-\chi-\Lambda}N^{ab}(C_{\mu\varrho a} - \sqrt{2}V^c_{\mu\varrho}b\epsilon_{ac})(C^{\mu\varrho}_b - \sqrt{2}V^{\mu\varrho d}b\epsilon_{bd}) \\ &+ \frac{1}{4}e^{\chi}(F^I_{\mu\varrho} + \sqrt{2}V^c_{\mu\varrho}A^I_c)(F^{\mu\varrho J} + \sqrt{2}V^{\mu\varrho d}A^J_d)(M^{-1})_{IJ}\Big], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{top} &= \int d^4x\epsilon^{\varrho\sigma\mu\nu}\Big[\frac{1}{2}b\epsilon_{ab}\left(\frac{1}{2}F^I_{\varrho\sigma} + \sqrt{2}\partial_\varrho(V^c_\sigma A^I_c)\right)\left(\frac{1}{2}F^J_{\mu\nu} + \sqrt{2}\partial_\mu(V^d_\nu A^J_d)\right) \\ &+ \frac{1}{2}\partial_\mu\left(B_{\varrho\sigma} - \frac{1}{\sqrt{2}}V^c_\varrho C_{\sigma c} + \frac{1}{\sqrt{2}}V^d_\sigma C_{\varrho d} + 2V^c_\varrho V^d_\sigma b\epsilon_{cd}\right)A^I_a\partial_\nu A^J_b \\ &- 2\left(C_{\varrho a} - \sqrt{2}V^b_\varrho b\epsilon_{ab}\right)\left(\frac{1}{2}F^I_{\sigma\mu} + \sqrt{2}\partial_\sigma(V^d_\mu A^I_d)\right)\partial_\nu A^J_b\Big]\epsilon^{ab}L_{IJ}, \end{aligned}$$

Reduktion $m \equiv 0$

$$\begin{aligned} S_{ska} = \int d^4x\sqrt{-g} \quad \Big[\quad & \frac{1}{8}\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi - \frac{1}{16}(\partial_\mu N_{ab})(\partial^\mu N^{ab}) \\ + \quad & \frac{1}{4}N^{ab}N^{cd}e^{-2\chi}(\partial_\mu b\epsilon_{ac})(\partial^\mu b\epsilon_{bd}) \\ + \quad & \frac{1}{2}e^\Lambda N^{cd}\partial_\mu A^I_c\partial^\mu A^J_d(M^{-1})_{IJ} \\ + \quad & \frac{1}{8}\partial_\mu\Lambda\partial^\mu\Lambda - \frac{1}{32}\partial_\mu(M^{-1})_{IJ}\partial^\mu M^{IJ}\Big], \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} S_2 \quad = \quad & \frac{1}{12}\int d^4x\sqrt{-g}e^{-2\Lambda}(\partial_\mu B_{\varrho\kappa} - \frac{1}{\sqrt{2}}C_{\mu a}V^a_{\varrho\kappa} - \frac{1}{\sqrt{2}}C_{\varrho\kappa a}V^a_\mu + \text{z.p.}) \\ \times \quad & (\partial^\mu B^{\varrho\kappa} - \frac{1}{\sqrt{2}}C^\mu_b V^{\varrho\kappa b} - \frac{1}{\sqrt{2}}C^{\varrho\kappa}_b V^{\mu b} + \text{z.p.}) \end{aligned}$$

(z.P.=zyklische Permutation).

Reduktion $m \neq 0$

Wenn alle Massen ungleich 0 sind, betrachte

$$\begin{aligned}
\hat{S} \quad = \quad & \int\limits_{M_6} d^6\hat{x}\,\sqrt{-\hat{g}}\Big[\frac{1}{4}e^{-2\hat{\Phi}}\Big(-\hat{R} - 4\partial_{\hat{\mu}}\hat{\Phi}\partial^{\hat{\mu}}\hat{\Phi} + \frac{1}{3}\hat{H}_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\varrho}}\hat{H}^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\varrho}} \\
- \quad & \frac{1}{8}\partial_{\hat{\mu}}(M^{-1})_{IJ}\partial^{\hat{\mu}}M^{IJ}\Big) + \frac{1}{4}\hat{F}^{I}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}\hat{F}^{\hat{\mu}\hat{\nu}J}(M^{-1})_{IJ} + \frac{1}{2}m^{I}(M^{-1})_{IJ}m^{J}\Big] \\
+ \quad & \int\limits_{M_6} d^6\hat{x}\,\epsilon^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\varrho}\hat{\sigma}\hat{\kappa}\hat{\lambda}}\Big(\frac{1}{8}\hat{B}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}\hat{F}^{I}_{\hat{\varrho}\hat{\sigma}}\hat{F}^{J}_{\hat{\kappa}\hat{\lambda}}L_{IJ} - \frac{1}{8}\hat{B}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}\hat{B}_{\hat{\varrho}\hat{\sigma}}\hat{F}^{J}_{\hat{\kappa}\hat{\lambda}}m^{I}L_{IJ} \\
+ \quad & \frac{1}{6}\hat{B}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}\hat{B}_{\hat{\varrho}\hat{\sigma}}\hat{B}_{\hat{\kappa}\hat{\lambda}}m^{I}L_{IJ}m^{J}\Big)
\end{aligned}$$

$\rightarrow$ Erhalte wie im masselosen Fall reduzierte Wirkung, diesmal in der Form

$$S = S_{EH} + S_1 + S_2 + S_{top} + S_{ska} + S_{pot}$$

Reduktion $m \neq 0$

$$S_{EH} = -\frac{1}{4}\int d^4x\sqrt{-g}R(x),$$

$$\begin{aligned}
S_1 &= \frac{1}{4}\int d^4x\sqrt{-g}e^{\chi}[(F^I_{\mu\varrho} + \sqrt{2}V^a_{\mu\varrho}A^I_a) + 2m^I(B_{\mu\varrho} + \sqrt{2}V^a_{[\mu}C_{\varrho]a})] \\
&\times [(F^{\mu\varrho J} + \sqrt{2}V^{\mu\varrho b}A^J_b) + 2m^J(B^{\mu\varrho} + \sqrt{2}V^{[\mu b}C^{\varrho]}_b)] \\
&+ \frac{1}{8}\int d^4x\sqrt{-g}e^{\chi-\Lambda}N_{ab}V^a_{\mu\varrho}V^{\mu\varrho b} \\
&+ \frac{1}{4}\int d^4x\sqrt{-g}e^{-\chi-\Lambda}N^{ab}(C_{\mu\varrho a} - \sqrt{2}V^c_{\mu\varrho}b\epsilon_{ac})(C^{\mu\varrho}_b - \sqrt{2}V^{\mu\varrho d}b\epsilon_{bd}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_2 &= \frac{1}{12}\int d^4x\sqrt{-g}e^{-2\Lambda}(\partial_\mu B_{\varrho\kappa} - \frac{1}{\sqrt{2}}C_{\mu a}V^a_{\varrho\kappa} - \frac{1}{\sqrt{2}}C_{\varrho\kappa a}V^a_\mu + \text{z.P.}) \\
&\times (\partial^\mu B^{\varrho\kappa} - \frac{1}{\sqrt{2}}C^\mu_b V^{\varrho\kappa b} - \frac{1}{\sqrt{2}}C^{\varrho\kappa}_b V^{\mu b} + \text{z.P.}),
\end{aligned}$$

Reduktion $m \neq 0$

$$\begin{aligned}
S_{ska} &= \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}e^{\Lambda}N^{ab}(\partial_\mu A_a^I + 2m^I C_{\mu a})(\partial^\mu A_b^J + 2m^J C_b^\mu)(M^{-1})_{IJ} \\
&+ \int d^4x\sqrt{-g}\Big[+\frac{1}{8}\partial_\mu\Lambda\partial^\mu\Lambda - \frac{1}{16}(\partial_\mu N_{ab})(\partial^\mu N^{ab}) \\
&+ \frac{1}{4}N^{ab}N^{cd}e^{-2\chi}(\partial_\mu b\epsilon_{ac})(\partial^\mu b\epsilon_{bd}) \\
&+ \frac{1}{8}\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi - \frac{1}{32}\partial_\mu(M^{-1})_{IJ}\partial^\mu M^{IJ}\Big],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{pot} &= \int d^4x\sqrt{-g}\Big[+e^{2\Lambda-\chi}N^{ab}N^{cd}b^2\epsilon_{ac}\epsilon_{bd}m^I(M^{-1})_{IJ}m^J \\
&+ \frac{1}{2}e^{\chi+2\Lambda}m^I(M^{-1})_{IJ}m^J\Big]
\end{aligned}$$

Reduktion $m \neq 0$

und

$$\begin{aligned}
S_{top} &= \int d^4x \epsilon^{\varrho\sigma\mu\nu} \Big[\frac{1}{2} b\epsilon_{ab} \left(\frac{1}{2} F^I_{\varrho\sigma} + \sqrt{2}\partial_\varrho (V^c_\sigma A^I_c) \right) \left(\frac{1}{2} F^J_{\mu\nu} + \sqrt{2}\partial_\mu (V^d_\nu A^J_d) \right) \\
&+ \frac{1}{2}\partial_\mu \left(B_{\varrho\sigma} - \frac{1}{\sqrt{2}} V^c_\varrho C_{\sigma c} + \frac{1}{\sqrt{2}} V^d_\sigma C_{\varrho d} + 2V^c_\varrho V^d_\sigma b\epsilon_{cd} \right) A^I_a \partial_\nu A^J_b \\
&- 2\left(C_{\varrho a} - \sqrt{2} V^b_\varrho b\epsilon_{ab} \right) \left(\frac{1}{2} F^I_{\sigma\mu} + \sqrt{2}\partial_\sigma (V^d_\mu A^I_d) \right) \partial_\nu A^J_b \Big] \epsilon^{ab} L_{IJ} \\
&+ \int d^4x \epsilon^{\varrho\sigma\mu\nu} \left(B_{\mu\nu} - \frac{1}{\sqrt{2}} V^c_\mu C_{\nu c} + \frac{1}{\sqrt{2}} V^d_\nu C_{\mu d} + 2V^c_\mu V^d_\nu b\epsilon_{cd} \right) \\
&\times \Big[-2(C_{\varrho a} - \sqrt{2} V^c_\varrho b\epsilon_{ac}) \partial_\sigma A^J_b \epsilon^{ab} m^I L_{IJ} \\
&+ 2b \left(\frac{1}{2} F^J_{\varrho\sigma} + \sqrt{2}\partial_\varrho (V^d_\sigma A^J_d) \right) m^I L_{IJ} \\
&- 2(C_{\varrho a} - \sqrt{2} V^c_\varrho b\epsilon_{ac})(C_{\sigma b} - \sqrt{2} V^d_\sigma b\epsilon_{bd}) \epsilon^{ab} m^I L_{IJ} m^J \\
&+ b(B_{\varrho\sigma} - \frac{1}{\sqrt{2}} V^c_\varrho C_{\sigma c} + \frac{1}{\sqrt{2}} V^d_\sigma C_{\varrho d} + 2V^c_\varrho V^d_\sigma b\epsilon_{cd}) m^I L_{IJ} m^J \Big],
\end{aligned}$$

$\mathcal{N}=4, D=4$ SUGRA

Jede masselose Supergravitation in vier Dimensionen kann man darstellen als

$$
\begin{aligned}
S_{kin} \quad := \quad & \int d^4x\sqrt{-g}\Big(\frac{1}{2}R + \frac{1}{16}\partial_\mu \mathcal{M}_{MN}\partial^\mu \mathcal{M}^{MN} - \frac{1}{4Im(\tau)^2}\partial_\mu\tau\partial^\mu\tau^* \\
- \quad & \frac{1}{4}Im(\tau)\mathcal{M}_{MN}H^{M+}_{\mu\nu}H^{\mu\nu N+}\Big) + \frac{1}{8}\int d^4x\ Re(\tau)\epsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}\eta_{MN}H^{M+}_{\mu\nu}H^{N+}_{\varrho\sigma}
\end{aligned}
$$

mit elektrischer Feldstärke $H^{M+}_{\mu\nu} := \partial_{[\mu}H^{M+}_{\nu]}$,
Spin 0-Teilchen $\tau \in \mathbb{C}, \mathcal{M}_{MN}$
und Metrik $\eta_{MN} \in SO(6,22)$.

$\rightarrow$ Aufgabe: Vergleich dieser Wirkung mit Ergebnis der Reduktion!

$\rightarrow$ Problem: Feldgehalt stimmt nicht überein!!!

Dualisierung von $B_{\mu\nu}$

In allgemeiner Wirkung tritt kein $B_{\mu\nu}$ auf, aber in der reduzierten Wirkung.
$\rightarrow$ Lösung: Dualisierung

Allgemeine Wirkung lautet:

$$\mathcal{L}_2 = -\frac{f}{3!}(H_{\mu\nu\varrho} - F_{\mu\nu\varrho})(H^{\mu\nu\varrho} - F^{\mu\nu\varrho}) + \frac{1}{3!}H_{\mu\nu\varrho}J_\sigma\epsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}$$

mit

$$\begin{aligned} H_{\mu\nu\varrho}, F_{\mu\nu\varrho} &= \text{Dreiformen} \\ J_\sigma &= \text{Vektor} \\ f &= \text{skalare Funktion} \end{aligned}$$

Dualisierung von $B_{\mu\nu}$

Addiere Lagrangschen Multiplikator

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_2 = \quad & - \quad \frac{f}{3!}(H_{\mu\nu\varrho} - F_{\mu\nu\varrho})(H^{\mu\nu\varrho} - F^{\mu\nu\varrho}) \\ & + \quad \frac{1}{3!} H_{\mu\nu\varrho}\,(J_\sigma + \partial_\sigma a)\,\epsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}\end{aligned}$$

Nutze Bewegungsgleichung $0 = \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial H_{\mu\nu\varrho}}$ und erhalte

$$H_{\mu\nu\varrho} = F_{\mu\nu\varrho} + \frac{1}{2f}\,(J_\sigma + \partial_\sigma a)\,\epsilon_{\mu\nu\varrho}{}^{\sigma}$$

Dualisierung von $B_{\mu\nu}$

Einsetzen liefert:

$$\mathcal{L}_{2,dual} = \frac{1}{3f} g^{\mu\nu}(J_\mu + \partial_\mu a)(J_\nu + \partial_\nu a) + \frac{1}{3!} F_{\mu\nu\varrho}(J_\sigma + \partial_\sigma a)\epsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}$$

Bem.:

1. Die Euler-Lagrange Gleichung nach a stellt gerade sicher, dass $H_{\mu\nu\varrho} = \partial_\mu B_{\nu\varrho} +$ z.P. ist.
2. Das Feld a nennt sich das zu $B_{\mu\nu}$ duale Feld und ist ein Skalar.

Dualisierung von $C_{\mu a}$

Weiterhin treten in der allgemeinen Wirkung nur elektrische Vektoren auf. $C_{\mu a}$ stellt sich jedoch als magnetischer Vektor heraus.
$\longrightarrow$ Dualisierung des Vektors $C_{\mu a}$

Allgemeine Wirkung:

$$\mathcal{L}_1 = -\frac{f}{2} N^{ab}(C_{\mu\nu a} - J_{\mu\nu a})(C_b^{\mu\nu} - J_b^{\mu\nu}) - \frac{1}{4} C_{\mu\nu a} K^a_{\varrho\sigma} \epsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}$$

mit

$$\begin{aligned} J_{\mu\nu a}, K^a_{\varrho\sigma} &= \text{Zweiformfelder} \\ f &= \text{skalare Funktion} \end{aligned}$$

Dualisierung von $C_{\mu a}$

Addiere Lagrangschen Multiplikator

$$\mathcal{L}_1 = -\frac{f}{2}N^{ab}(C_{\mu\nu a} - J_{\mu\nu a})(C_b^{\mu\nu} - J_b^{\mu\nu}) - \frac{1}{4}C_{\mu\nu a}\left(K^a_{\varrho\sigma} + D^a_{\varrho\sigma}\right)\epsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}$$

Nutze Euler-Lagrange Gleichung $0 = \frac{\partial\mathcal{L}_1}{\partial C_{\mu\nu a}}$ und erhalte

$$C_{\mu\nu a} = J_{\mu\nu a} - \frac{e^{\frac{1}{2}(\Lambda-\chi)}}{4f}\left(K_{\varrho\sigma a} + D_{\varrho\sigma a}\right)\epsilon_{\mu\nu}{}^{\varrho\sigma}$$

Dualisierung von $C_{\mu a}$

Einsetzen liefert:

$$\mathcal{L}_{1,dual} = -\frac{1}{8f} N_{ab}(K^a_{\mu\varrho} + D^a_{\mu\varrho})(K^{\mu\varrho b} + D^{\mu\varrho b}) - \frac{1}{4} J_{\mu\nu a}(K^a_{\varrho\sigma} + D^a_{\varrho\sigma})\epsilon^{\mu\nu\varrho\sigma},$$

wobei man Relationen zwischen h_{ab} und N_{ab} verwenden muss.

Vergleich

Nach den Dualisierungen ergibt sich nach der Reskalierung $D^a_{\mu\nu} \rightarrow \sqrt{2} D^a_{\mu\nu}$ für den topologischen Term

$$\begin{aligned} S_{top,dual} &= \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\varrho\sigma} \left(\frac{1}{4} b F^I_{\varrho\sigma} F^J_{\mu\nu} L_{IJ} - \frac{1}{2} V^c_{\mu\nu} b \epsilon_{ac} D^a_{\varrho\sigma} \right) \\ &= -\frac{1}{16} \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\varrho\sigma} (-4b) \left(F^I_{\mu\nu} F^J_{\varrho\sigma} L_{IJ} - V^c_{\mu\nu} \epsilon_{bc} D^b_{\varrho\sigma} - V^d_{\mu\nu} \epsilon_{ad} D^a_{\varrho\sigma} \right) \end{aligned}$$

Man kann definieren:

$$Re(\tau) := -4b,$$

$$H^{M+}_{\mu\nu} := \begin{pmatrix} F^I_{\mu\nu} \\ D^a_{\mu\nu} \\ V^{\bar{c}}_{\mu\nu} \end{pmatrix}, \eta_{MN} := \begin{pmatrix} L_{IJ} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\epsilon_{a\bar{d}} \\ 0 & \epsilon_{\bar{c}b} & 0 \end{pmatrix}, \quad M := (I, a, \bar{c})$$

Vergleich

Damit lässt sich die Wirkung schreiben als

$$S_{top,dual} = -\frac{1}{16}\int d^4x Re(\tau)\eta_{MN}\epsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}H^{M+}_{\mu\nu}H^{N+}_{\varrho\sigma}$$

$Im(\tau)$ lässt sich bestimmen durch

$$\frac{1}{8}\frac{1}{Im(\tau)^2}\partial_\mu Re(\tau)\partial^\mu Re(\tau) = \frac{1}{4}e^{-2\chi}N^{ab}N^{cd}\partial_\mu(b\epsilon_{ac})\partial^\mu(b\epsilon_{bd})$$

mit Lösung

$$Im(\tau) = 2e^\chi$$

$$\rightarrow \tau = \tau(b,\chi) = -4b + i2e^\chi$$

Vergleich

Es bleibt $\mathcal{M}_{MN}$ zu bestimmen. Betrachte dazu komplette Wirkung der Vektorfelder

$$\begin{aligned} S_{1,dual} &= \int d^4x\sqrt{-g}\Big[\frac{1}{8}e^{\chi-\Lambda}N_{ab}V^a_{\mu\varrho}V^{\mu\varrho b} + \frac{1}{4}e^{\chi+\Lambda}N_{ab}(2F^I_{\mu\varrho}A^J_c\epsilon^{ac}L_{IJ} \\ &+ \sqrt{2}V^d_{\mu\varrho}A^I_dA^J_c\epsilon^{ac}L_{IJ} - \sqrt{2}V^a_{\mu\varrho}a + \sqrt{2}D^a_{\mu\varrho}) \\ &\times (2F^{\mu\varrho I}A^J_d\epsilon^{bd}L_{IJ} + \sqrt{2}V^{\mu\varrho d}A^I_dA^J_e\epsilon^{be}L_{IJ} - \sqrt{2}V^{\mu\varrho b}a + \sqrt{2}D^{\mu\varrho b}) \\ &+ \frac{1}{4}e^{\chi}(F^I_{\mu\varrho} + \sqrt{2}V^c_{\mu\varrho}A^I_c)(F^{\mu\varrho J} + \sqrt{2}V^{\mu\varrho d}A^J_d)(M^{-1})_{IJ}\Big]. \end{aligned}$$

Vergleich

Verwendet man $Im(\tau)=2e^{\chi}$, dann kann man definieren

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}_{IJ} &:= 4e^{\Lambda}N_{ab}A^K_{\bar c}A^L_{\bar d}\epsilon^{a\bar c}\epsilon^{b\bar d}L_{IK}L_{LJ}+(M^{-1})_{IJ},\\
\mathcal{M}_{ab} &:= +2e^{\Lambda}N_{ab},\\
\mathcal{M}_{Ib} &:= +2\sqrt{2}\ e^{\Lambda}N_{ab}A^J_{\bar c}\epsilon^{a\bar c}L_{IJ},\\
\mathcal{M}_{a\bar d} &:= 2\ e^{\Lambda}N_{ab}A^I_{\bar d}A^J_{\bar c}\epsilon^{b\bar c}L_{IJ}-2\ e^{\Lambda}N_{a\bar d}a,\\
\mathcal{M}_{I\bar d} &:= \sqrt{2}A^J_{\bar d}(M^{-1})_{IJ}+2\sqrt{2}\ e^{\Lambda}N_{ab}A^J_{\bar c}A^K_{\bar d}A^L_{e}\epsilon^{a\bar c}\epsilon^{be}L_{IJ}L_{KL}\\
&\quad - 2\sqrt{2}\ e^{\Lambda}N_{a\bar d}A^J_{\bar c}a\epsilon^{a\bar c}L_{IJ},\\
\mathcal{M}_{\bar c\bar d} &:= \frac{1}{2}e^{-\Lambda}N_{\bar c\bar d}+2\ A^I_{\bar c}A^J_{\bar d}(M^{-1})_{IJ}+2\ e^{\Lambda}N_{\bar c\bar d}a^2\\
&\quad + 2\ e^{\Lambda}N_{ab}A^I_{\bar c}A^K_{\bar d}A^K_{e}A^L_{f}\epsilon^{ae}\epsilon^{bf}L_{IJ}L_{KL}\\
&\quad - 2\ e^{\Lambda}N_{a\bar d}A^I_{\bar c}A^J_{e}a\epsilon^{ae}L_{IJ}-2\ e^{\Lambda}N_{\bar c b}A^I_{\bar d}A^J_{f}a\epsilon^{bf}L_{IJ}
\end{aligned}
$$

Vergleich

$$\rightarrow S_{kin,1} = \frac{1}{8}\int d^4x\sqrt{-g}Im(\tau)\mathcal{M}_{MN}H^{M+}_{\mu\nu}H^{\mu\nu N+}$$

Für die skalaren Felder folgt dann tatsächlich:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{32}\int d^4x\,\sqrt{-g}\partial_\mu\mathcal{M}_{MN}\partial^\mu\mathcal{M}^{MN} &= \int d^4x\sqrt{-g}\Big[-\frac{1}{16}(\partial_\mu N_{ab})(\partial^\mu N^{ab}) \\
&+ \frac{1}{2}e^\Lambda N^{cd}\partial_\mu A^I_c\partial^\mu A^J_d(M^{-1})_{IJ} \\
&+ \frac{1}{8}\partial_\mu\Lambda\partial^\mu\Lambda - \frac{1}{32}\partial_\mu(M^{-1})_{IJ}\partial^\mu M^{IJ} \\
&- \frac{2}{3}e^{2\Lambda}(A^I_a\partial_\mu A^J_b\epsilon^{ab}L_{IJ} + \partial_\mu a) \\
&\times (A^K_c\partial^\mu A^L_d\epsilon^{cd}L_{KL} + \partial^\mu a)\Big]
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\frac{1}{8Im(\tau)^2}\int d^4x\,\sqrt{-g}\partial_\mu\tau\partial^\mu\tau^* &= \int d^4x\sqrt{-g}\Big[\frac{1}{8}\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi \\
&+ \frac{1}{4}N^{ab}N^{cd}e^{-2\chi}(\partial_\mu b\epsilon_{ac})(\partial^\mu b\epsilon_{bd})\Big]
\end{aligned}$$

$\mathcal{N} = 4, D = 4$ SUGRA

Wie im masselosen Fall kinetischer Term in der Form

$$\begin{aligned} S_{kin} \quad := \quad & \int d^4x\sqrt{-g}\Big(\frac{1}{2}R + \frac{1}{16}D_\mu \mathcal{M}_{MN} D^\mu \mathcal{M}^{MN} - \frac{1}{4Im(\tau)^2}D_\mu \tau D^\mu \tau^* \\ - \quad & \frac{1}{4}Im(\tau)\mathcal{M}_{MN} H^{M+}_{\mu\nu} H^{\mu\nu N+}\Big) + \frac{1}{8}\int d^4x Re(\tau)\eta_{MN}\epsilon^{\mu\nu\varrho\sigma} H^{M+}_{\mu\nu} H^{N+}_{\varrho\sigma} \end{aligned}$$

zusätzlich Potential

$$\begin{aligned} S_{pot} := -\frac{1}{16}\int d^4x\sqrt{-g}\Big\{ & f_{\alpha MNP} f_{\beta QRS} \tilde{M}^{\alpha\beta}\Big(\frac{1}{3}\mathcal{M}^{MQ}\mathcal{M}^{NR}\mathcal{M}^{PS} \\ & + \left(\frac{2}{3}\eta^{MQ} - \mathcal{M}^{MQ}\right)\eta^{NR}\eta^{PS}\Big) \\ & - \frac{4}{9} f_{\alpha MNP} f_{\beta QRS}\epsilon^{\alpha\beta}\mathcal{M}^{MNPQRS} + 3\xi^M_\alpha \xi^N_\beta \tilde{M}^{\alpha\beta}\mathcal{M}_{MN}\Big\} \end{aligned}$$

$\mathcal{N}=4, D=4$ SUGRA

und zusätzlicher topologischer Term

$$
\begin{aligned}
S_{top} := \int \quad & - \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\varrho\lambda}\Big(\xi_{+M}\eta_{NP}H_\mu^{M-}H_\nu^{N+}\partial_\varrho H_\lambda^{P+} \\
& - (\hat{f}_{-MNP} + 2\xi_{-N}\eta_{MP})H_\mu^{M-}H_\nu^{N+}\partial_\varrho H_\lambda^{P-} \\
& + \frac{1}{16}\Theta_{+MNP}\Theta_{-}{}^{M}{}_{QR}B_{\mu\nu}^{NP}B_{\varrho\lambda}^{QR} \\
& - \frac{1}{4}\hat{f}_{\alpha MNR}\hat{f}_{\beta PQ}{}^{R}H_\mu^{M\alpha}H_\nu^{N+}H_\varrho^{P\beta}H_\lambda^{Q-} \\
& - \frac{1}{4}\left(\Theta_{-MNP}B_{\mu\nu}^{NP} + \xi_{-M}B_{\mu\nu}^{+-} + \xi_{+M}B_{\mu\nu}^{++}\right) \\
& \times \quad (2\partial_\varrho H_\lambda^{M-} - \hat{f}_{\alpha QR}{}^{M}H_\varrho^{Q\alpha}H_\lambda^{R-})\Big)
\end{aligned}
$$

$\mathcal{N} = 4, D = 4$ SUGRA

Im Vergleich zur masselosen Theorie

- Matrix $\tilde{M} \sim \tau$:

$$\begin{aligned} \tilde{M}_{\alpha\beta} &:= \frac{1}{Im(\tau)} \begin{pmatrix} |\tau|^2 & Re(\tau) \\ Re(\tau) & 1 \end{pmatrix}, \\ \tilde{M}^{\alpha\beta} &= \frac{1}{Im(\tau)} \begin{pmatrix} 1 & -Re(\tau) \\ -Re(\tau) & |\tau|^2 \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \{+, -\} \end{aligned}$$

  mit $Im(\tau)^{-2}(\partial_\mu \tau)(\partial^\mu \tau^*) = -\frac{1}{2}(\partial_\mu \tilde{M}_{\alpha\beta})(\partial^\mu \tilde{M}^{\alpha\beta})$

- kovariante Ableitungen:

$$\begin{aligned} D_\mu \mathcal{M}_{MN} &= \partial_\mu \mathcal{M}_{MN} + 2H_\mu^{P\alpha} \Theta_{\alpha P(M}{}^{Q} \mathcal{M}_{N)Q}, \\ D_\mu \tilde{M}_{\alpha\beta} &= \partial_\mu \tilde{M}_{\alpha\beta} + H_\mu^{M\gamma} \xi_{(\alpha M} \tilde{M}_{\beta)\gamma} - H_\mu^{M\delta} \xi_{\epsilon M} \epsilon_{\delta(\alpha} \epsilon^{\epsilon\gamma} \tilde{M}_{\beta)\gamma} \end{aligned}$$

$\mathcal{N}=4, D=4$ SUGRA

- verallgemeinerte Feldstärke:

$$\begin{aligned} H^{M+}_{\mu\nu} &:= \partial_{[\mu} H^{M+}_{\nu]} - \frac{1}{2}\hat{f}_{\alpha NP}{}^{M} H^{N\alpha}_{[\mu} H^{P+}_{\nu]} \\ &+ \frac{1}{4}\Theta_{-}{}^{M}{}_{NP} B^{NP}_{\mu\nu} + \frac{1}{4}\xi^{M}_{+} B^{++}_{\mu\nu} + \frac{1}{4}\xi^{M}_{-} B^{+-}_{\mu\nu} \end{aligned}$$

- Zweiformen $B^{MN}_{\mu\nu} = B^{[MN]}_{\mu\nu}$ und $B^{\alpha\beta}_{\mu\nu} = B^{(\alpha\beta)}_{\mu\nu} = (B^{++}_{\mu\nu}, B^{+-}_{\mu\nu}, B^{--}_{\mu\nu})$ sowie magnetische Vektoren H^{M-}_{μ}
- zentrale Größen sind die *embedding Tensoren* $f_{\alpha MNP} = f_{\alpha[MNP]}$ und $\xi_{\alpha M}$ sowie ihre Linearkombinationen

$$\begin{aligned} \Theta_{\alpha MNP} &:= f_{\alpha MNP} - \xi_{\alpha[N}\eta_{P]M}, \\ \hat{f}_{\alpha MNP} &:= f_{\alpha MNP} - \xi_{\alpha[M}\eta_{P]N} - \frac{3}{2}\xi_{\alpha N}\eta_{MP} \end{aligned}$$

$\mathcal{N} = 4, D = 4$ SUGRA

Im Fall $f_{\alpha MNP}, \xi_{\alpha M} \to 0$ erhalte masselose Theorie

$\to$ zentrale Aufgabe: Bestimmung von $f_{\alpha MNP}$ und $\xi_{\alpha M}$

$f_{\alpha MNP}$ und $\xi_{\alpha M}$

Betrachte Potential

$$
\begin{aligned}
S_{pot} &= \int d^4x\sqrt{-g}\Big[-4e^{2\Lambda-\chi}b^2 m^I (M^{-1})_{IJ} m^J \\
&- e^{\chi+2\Lambda} m^I (M^{-1})_{IJ} m^J\Big]
\end{aligned}
$$

$\rightarrow$ Es tritt nur $b^2 \sim Re(\tau)^2$, aber nicht $b \sim Re(\tau)$ auf
$\rightarrow$ nur $\tilde{M}^{--} \sim |\tau|^2 \sim Re(\tau)^2$ tritt auf.

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow f_{+MNP} &\equiv 0 \;\forall M, N, P. \\
\xi_{+M} &\equiv 0 \;\forall M.
\end{aligned}
$$

$f_{\alpha MNP}$ und $\xi_{\alpha M}$

Mit $\tilde{M}^{--}=\frac{|\tau|^2}{Im(\tau)}=8b^2e^{-\chi}+2e^{\chi}$ nimmt Potential dann diese Form an

$$\begin{aligned} S_{pot}=-\frac{1}{16}\int d^4x\sqrt{-g} \quad \Big[& \quad f_-^{MNP}f_-^{QRS}(8b^2e^{-\chi}+2e^{\chi})\Big(\frac{1}{3}\mathcal{M}_{MQ}\mathcal{M}_{NR}\mathcal{M}_{PS} \\ + & \quad \Big(\frac{2}{3}\eta_{MQ}-\mathcal{M}_{MQ}\Big)\eta_{NR}\eta_{PS}\Big) \\ + & \quad 3\xi_-^M\xi_-^N(8b^2e^{-\chi}+2e^{\chi})\mathcal{M}_{MN}\Big] \end{aligned}$$

Differenz von Exponentialfunktionen $\longrightarrow$ betrachte nur ersten Term

$$\mathcal{L}_{pot,1}:=-\frac{1}{16}f_-^{MNP}f_-^{QRS}\left(8b^2e^{-\chi}+2e^{\chi}\right)\left(\frac{1}{3}\mathcal{M}_{MQ}\mathcal{M}_{NR}\mathcal{M}_{PS}\right).$$

$f_{\alpha MNP}$ und $\xi_{\alpha M}$

Vergleich zeigt, dass $f_-^{MNP} \sim m^I$ $\rightarrow$ betrachte nur $f_-^{Ia_1a_2}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{pot,1} &= -\frac{1}{48}\left(8b^2e^{-\chi}+2e^{\chi}\right)\Big[f_-^{Ia_1a_2}f_-^{Jb_1b_2}\mathcal{M}_{IJ}\mathcal{M}_{a_1a_2}\mathcal{M}_{b_1b_2} \\
&+ f_-^{Ia_1a_2}f_-^{b_1b_2J}\mathcal{M}_{Ib_1}\mathcal{M}_{a_1b_2}\mathcal{M}_{a_2J}+f_-^{Ia_1a_2}f_-^{b_1Jb_2}\mathcal{M}_{Ib_1}\mathcal{M}_{a_1J}\mathcal{M}_{a_2b_2} \\
&+ f_-^{a_1a_2I}f_-^{Jb_1b_2}\mathcal{M}_{a_1J}\mathcal{M}_{a_2b_1}\mathcal{M}_{Ib_2}+f_-^{a_1a_2I}f_-^{b_1b_2J}\mathcal{M}_{a_1a_2}\mathcal{M}_{a_2J}\mathcal{M}_{Ib_2} \\
&+ f_-^{a_1a_2I}f_-^{b_1Jb_2}\mathcal{M}_{a_1b_1}\mathcal{M}_{a_2J}\mathcal{M}_{Ib_2}+f_-^{a_1Ia_2}f_-^{Jb_1b_2}\mathcal{M}_{a_1J}\mathcal{M}_{Ib_1}\mathcal{M}_{a_2b_2} \\
&+ f_-^{a_1Ia_2}f_-^{b_1b_2J}\mathcal{M}_{a_1b_1}\mathcal{M}_{Ib_2}\mathcal{M}_{a_2J}+f_-^{a_1Ia_2}f_-^{b_1Jb_2}\mathcal{M}_{a_1b_1}\mathcal{M}_{IJ}\mathcal{M}_{a_2b_2}\Big]
\end{aligned}$$

$f_{\alpha MNP}$ und $\xi_{\alpha M}$

Nutze Antisymmetrie

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{pot,1} &= -\frac{1}{16}\left(8b^2e^{-\chi}+2e^{\chi}\right) f_-^{Ia_1a_2} f_-^{Jb_1b_2}\big(\mathcal{M}_{IJ}\mathcal{M}_{a_1b_1}\mathcal{M}_{a_2b_2} \\ &- 2\mathcal{M}_{Ib_1}\mathcal{M}_{a_1J}\mathcal{M}_{a_2b_2}\big)\end{aligned}$$

und setze $\mathcal{M}$ ein:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{pot,1} &= -\frac{1}{16}(8b^2e^{-\chi}+2e^{\chi}) f_-^{Ia_1a_2} f_-^{Jb_1b_2}\big(4e^{2\Lambda}N_{a_1b_1}N_{a_2b_2}(M^{-1})_{IJ} \\ &+ 16e^{3\Lambda}N_{a_1b_1}N_{a_2b_2}N_{a_3b_3}A^K_{\bar{c}}A^L_{\bar{d}}\epsilon^{a_3\bar{c}}\epsilon^{b_3\bar{d}}L_{IK}L_{LJ} \\ &- 32e^{3\Lambda}N_{a_2b_2}N_{a_3b_1}N_{a_1b_3}A^K_{\bar{c}}A^L_{\bar{d}}\epsilon^{a_3\bar{c}}\epsilon^{b_3\bar{d}}L_{IK}L_{LJ}\big)\end{aligned}$$

$f_{\alpha MNP}$ und $\xi_{\alpha M}$

Vergleich mit Potential liefert Gleichung

$$\begin{aligned} & - && (4b^2 e^{-\chi} + e^{\chi}) e^{2\Lambda} m^I (M^{-1})_{IJ} m^J \\ = & - && \frac{1}{16}(8b^2 e^{-\chi} + 2e^{\chi}) f_-^{Ia_1a_2} f_-^{Jb_1b_2} (4e^{2\Lambda} N_{a_1b_1} N_{a_2b_2} (M^{-1})_{IJ} \\ & + && 16 e^{3\Lambda} N_{a_1b_1} N_{a_2b_2} N_{a_3b_3} A_{\bar{c}}^K A_{\bar{d}}^L \epsilon^{a_3\bar{c}} \epsilon^{b_3\bar{d}} L_{IK} L_{LJ} \\ & - && 32 e^{3\Lambda} N_{a_2b_2} N_{a_3b_1} N_{a_1b_3} A_{\bar{c}}^K A_{\bar{d}}^L \epsilon^{a_3\bar{c}} \epsilon^{b_3\bar{d}} L_{IK} L_{LJ}) \end{aligned}$$

mit Lösung

$$f_-^{Iab} = m^I \epsilon^{ab}$$

Damit kann bereits das gesamte Potential hergeleitet werden:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \xi_{-M} &\equiv 0 \\ f_-^{MNP} &= \begin{cases} m^I \epsilon^{ab}, & \text{falls } M = I, N = a, P = b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

$f_{\alpha MNP}$ und $\xi_{\alpha M}$

Erhalte Linearkombinationen

$$\begin{aligned} \Theta_{+MNP} &= \hat{f}_{+MNP} = f_{+MNP} \equiv 0, \\ \Theta_{-MNP} &= \hat{f}_{-MNP} = f_{-MNP} = \begin{cases} m_I \epsilon_{ab}, & \text{falls } M = I, N = a, P = b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Zusammenfassung

1. Stringtheorie lebt in mehr als vier Raumzeit Dimensionen
2. Kaluza-Klein Reduktion auf kompakter Mannigfaltigkeit, z.B. zweidimensionalem Torus
3. Vergleich der reduzierten Theorie mit allgemeiner Theorie
   3.1 Bestimme elektrische Felder H_μ^{M+}, Skalare $\mathcal{M}_{MN}$ und τ sowie Metrik η_{MN} im masselosen Fall (auch für den massiven Fall gültig)
   3.2 Bestimme *embedding Tensoren* im massiven Fall
   3.3 Im Grenzfall $f_{\alpha MNP}, \xi_{\alpha M} \to 0$ erhalte masselose Theorie

Ausblick

Es bleibt der Vergleich der Wirkungen im massiven Fall.

$\rightarrow$ Dualisiere wieder $B_{\mu\nu}$
$\rightarrow$ Im massiven Fall ist $B_{\mu\nu}$ dual zu einem Vektor. Es tritt ein Term der Form

$$\int d^4x \, \sqrt{-g} \, P_\mu P^\mu$$

auf. Da der Feldgehalt dem der masselosen Theorie gleich sein muss, setze $P_\mu :\sim D_\mu a$ an. Damit

$$\int d^4x \, \sqrt{-g} \, P_\mu P^\mu \sim \int d^4x \, \sqrt{-g} \, D_\mu a D^\mu a$$

(Es ist nicht gesagt, dass nicht noch andere Summanden in P_μ auftreten.)

Ausblick

$\rightarrow$ In der reduzierten Wirkung treten keine Zweiformen $B_{\mu\nu}$ mehr auf.

$\rightarrow$ Eleminiere B aus der allgemeinen $\mathcal{N} = 4$ SUGRA

Kinetischer und topologischer Term nehmen mit $f_{-}^{Iab} = m^I \epsilon^{ab}$ folgende Form an:

$$
\begin{aligned}
S_{kin} \quad &= \quad \int d^4x \sqrt{-g} \Big[\frac{1}{2} R + \frac{1}{16} D_\mu \mathcal{M}_{MN} D^\mu \mathcal{M}^{MN} - \frac{1}{4 Im(\tau)^2} \partial_\mu \tau \partial^\mu \tau^* \\
&- \quad \frac{1}{4} Im(\tau) \mathcal{M}_{MN} H^{M+}_{\mu\nu} H^{\mu\nu N+} \Big] + \int d^4x \frac{1}{8} Re(\tau) \eta_{MN} \epsilon^{\mu\nu\varrho\sigma} H^{M+}_{\mu\nu} H^{N+}_{\varrho\sigma}
\end{aligned}
$$

Ausblick

und

$$\begin{aligned} S_{top} = \int \quad & - \quad \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\varrho\lambda}\Big[- f_{-MNP} H_\mu^{M-} H_\nu^{N+} \partial_\varrho H_\lambda^{P-} \\ & - \quad \frac{1}{4} f_{-MNR} f_{-PQ}{}^R H_\mu^{M-} H_\nu^{N+} H_\varrho^{P-} H_\lambda^{Q-} \\ & - \quad \frac{1}{4} f_{-MNP} B_{\mu\nu}^{NP} (2\partial_\varrho H_\lambda^{M-} - f_{-QR}{}^M H_\varrho^{Q-} H_\lambda^{R-})\Big] \end{aligned}$$

mit elektrischer Feldstärke

$$\begin{aligned} H_{\mu\nu}^{M+} &= \partial_{[\mu} H_{\nu]}^{M+} - \frac{1}{2} f_{-NP}{}^M H_{[\mu}^{N-} H_{\nu]}^{P+} \\ &+ \frac{1}{4} f_-{}^M{}_{NP} B_{\mu\nu}^{NP} . \end{aligned}$$

Ausblick

Wende Euler-Lagrange Gleichung für $B^{NP}_{\mu\nu}$ an und bekomme neue Wirkungen

$$\begin{aligned} S_{kin} &= \int d^4x\sqrt{-g}\Big[\frac{1}{2}R + \frac{1}{16}D_\mu\mathcal{M}_{MN}D^\mu\mathcal{M}^{MN} - \frac{1}{4Im(\tau)^2}\partial_\mu\tau\partial^\mu\tau^* \\ &- \frac{Im(\tau)}{|\tau|^2}\mathcal{M}_{MN}G^{M-}_{\mu\nu}G^{\mu\nu N-}\Big] + \int d^4x\frac{Re(\tau)}{2|\tau|^2}\eta_{MN}\epsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}G^{M-}_{\mu\nu}G^{N-}_{\varrho\sigma}. \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} S_{top} = \int \quad - &\quad \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\varrho\lambda}\Big(f_{-MNP}H^{M-}_\mu H^{N+}_\nu\partial_\varrho H^{P-}_\lambda \\ + &\quad \frac{3}{4}f_{-MNR}f_{-PQ}{}^R H^{M-}_\mu H^{N+}_\nu H^{P-}_\varrho H^{Q-}_\lambda\Big) \end{aligned}$$

mit

$$G^{M-}_{\mu\nu} := \partial_{[\mu}H^{M-}_{\nu]} - \frac{1}{2}f_{-QR}{}^M H^{Q-}_{[\mu}H^{R-}_{\nu]}$$

Ausblick

$\rightarrow$ Kein kinetischer Term mehr für elektrische, sondern nur noch für magnetische Vektoren.

$\rightarrow$ Dualisiere in reduzierter Wirkung dieses Mal elektrische Vektoren zu magnetischen Vektoren

$\rightarrow$ Eleminiere elektrischen Vektor H_μ^{M+} aus allgemeiner Wirkung

$\rightarrow$ Bestimme magnetische Vektoren H_μ^{M-}, um schließlich Wirkungen zu vergleichen

Danke :-)