$\mathcal{N} = 4$ Supergravitation einer T^2 - kompaktifizierten sechsdimensionalen Theorie

Diplomarbeit

von

Christoph Köhn

Kiel, 26. April 2010

Institut für Theoretische Physik und Astrophysik der
Christian-Albrechts-Universität zu Kiel

Gutachter

1. Prof. Dr. Jan Louis,
   II. Institut für Theoretische Physik, Department Physik, Universität Hamburg

2. Prof. Dr. Gerhard Grensing,
   Institut für Theoretische Physik und Astrophysik der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Obwohl die beiden großen Theorien des 20. Jahrhunderts, die Allgemeine Relativitätstheorie (ART) [1, 2] und die Quantenfeldtheorie (QFT) [3], sehr erfolgreich die Gravitation und große Massen (ART) sowie die Elementarteilchenphysik und kleine Längenskalen (QFT) beschreiben und experimentell sehr gut bestätigt werden konnten, gibt es immer noch Probleme, die mit Hilfe dieser Theorien nicht gelöst werden können. Auf der einen Seite wird bis heute nicht vollständig verstanden, warum man zwischen Materie, die von Fermionen generiert wird, und Wechselwirkungen, deren Ursprung Bosonen sind, unterscheiden muss. Um eine gemeinsame Theorie der Beschreibung von Materie und Wechselwirkungen zu finden, wäre es wünschenswert, wenn es eine Symmetrie zwischen Fermionen und Bosonen gäbe. Tatsächlich lässt sich eine solche Symmetrie finden, die Supersymmetre (SUSY) gennant wird [4]. In neuen Experimenten, die am LHC am Cern durchgeführt werden, will man versuchen, die supersymmetrischen Partner der bekannten Teilchen zu finden.

Supersymmetrisiert man die Allgemeine Relativitätstheorie, erhält man die Supergravitation (SUGRA). Das Wechselwirkungsteilchen der Gravitation ist das Graviton mit Spin 2. Entsprechend der Supersymmetrie zwischen Fermionen und Bosonen sollte dieses Teilchen einen fermionischen Partner haben, welches Gravitino genannt wird und Spin $\frac{3}{2}$ besitzt. Diesbezüglich gibt es verschiedene Modelle der Supergravitation mit einer unterschiedlichen Anzahl von Gravitinos. In seiner ursprünglichen Formulierung gab es nur ein Gravitino (dies ist die $\mathcal{N} = 1$ Supergravitation), wobei man auch Modelle betrachten kann, die mehr als ein Gravitino enthalten. (Hier schreibt man entsprechend die Anzahl $\mathcal{N}$ der Gravitinos auf.)

Auf der anderen Seite ist es nicht klar, warum drei der vier fundamentalen Kräfte, die elektromagnetische, die schwache und die starke Wechselwirkung, innerhalb der Quantenfeldtheorie zusammengefasst werden können, während dies für die Gravitationskraft nicht möglich ist. Fasst man diese Problematik allgemeiner auf, so kann man dies als Quantisierung der Gravitationstheorie auffassen. Dies ist notwendig, da es physikalische Phänomene gibt, die an der Grenze zwischen großen Massen und kleinen Längen liegen, wie zum Beispiel schwarze Löcher. Diese entstehen, wenn ein großer Stern am Ende seiner Existenz unter der eigenen Gravitation zusammenstürzt. Während die Masse des Sterns erhalten bleibt, wird die Raumzeit so stark gekrümmt, dass man eine Singularität vorliegen hat. Während massives Verhalten jedoch durch die Allgemeine Relativitätstheorie beschrieben wird, gehorchen kleine Objekte der Quantenfeldtheorie. Es wäre wünschenswert, eine Theorie vorliegen zu haben, aus der man die beiden fundamentellen Theorien herleiten und mit der man solche Grenzphänomene beschreiben kann. Deshalb ist es erforderlich, eine Quantengravitation zu entwickeln, die alle bekannten Kräfte sofort vereinheitlicht. Vielversprechende Kandidaten für diese Aufgabe sind die Loopquantengravitation [5], die nichtkommutative Geometrie [6, 7] und die Stringtheorie [8], wobei die Supergravitation selbst als niederenergetische effektive Theorie einer Stringtheorie betrachtet werden kann. Die Stringtheorie basiert auf der Idee, dass die fundamentalen Teilchen nicht punktförmig sind, sondern ausgedehnte Objekte (Strings), dessen Größenordnung bei etwa $10^{-35}m$ liegt. Die verschiedenen Teilchen, die heute bekannt sind, werden im Rahmen dieser Theorie durch unterschiedliche Schwingungsanregungen der Strings erklärt, wobei jede Anregung eine andere Teilchensorte beschreibt. Man unterscheidet dabei zwischen verschiedenen Formulierungen der Stringtheorie, deren Vereinheitlichung immer noch aktueller Forschungsgegenstand ist: Typ I, Typ IIA, Typ IIB, $E8$ und $SO(32)$. Der Ausgangspunkt dieser Arbeit wird eine zehndimensionale Typ IIA Theorie sein, wobei das markante Zeichen einer zehndimensionalen Typ IIA Stringtheorie ist, dass Fermionen beide Chiralitäten (links/rechts) besitzen. Tatsächlich leben Strings in $D = 10$ oder $D = 26$ Dimensionen. Eine mögliche Erklärung ist, dass die weiteren Dimensionen (neben den drei beobachtbaren Raumdimensionen) so klein sind, dass sie nicht gesehen werden können. Um dies zu erreichen, kann man sich kompaktifizierte Dimensionen vorstellen, die aufgerollt sein müssen. Damit bleibt die Aufgabe, die Anzahl der Dimensionen von $D > 4$ auf $D = 4$ zu reduzieren. Die Lösung zu diesem Problem ist die Kaluza-Klein Reduktion. Im Jahre 1926 untersuchten Kaluza und Klein eine fünfdimensionale Allgemeine Relativitätstheorie [9]. Sie wählten eine fünfdimensionale Mannigfaltigkeit M_5 als Produktmannigfaltigkeit einer beliebigen vierdimensionalen Mannigfaltigkeit M_4 und der 1-Sphäre S^1

$$M_5 := M_4 \times S^1, \tag{1.1}$$

dessen Metrik die Metrik von M_4 und ein $U(1)$ Vektorfeld beinhaltet. Indem man die Metrik in einen vierdimensionalen Teil, einen $U(1)$ Vektor und einen Skalar aufteilt, lässt sich die fünfdimensionale Theorie auf vier Dimensionen reduzieren, wobei man neben der allgemeinen Relativitätstheorie in vier Dimensionen Maxwells Elektrodynamik erhält. Dabei wird das $U(1)$ Vektorfeld, welches in dieser Theorie auftritt, in die fünfdimensionale Metrik eingebunden. Diese Theorie der dimensionalen Reduktion lässt sich nun verallgemeinern. Auf der einen Seite lässt sich die Reduktion nicht nur mit $U(1)$ Vektorfeldern, sondern auch mit nicht-abelschen Feldern durchführen [10], was gerade deshalb von Interesse ist, da die Eichgruppe $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$, die der heutigen Elementarteilchenphysik zu Grunde liegt, nicht-abelsche Gruppen enthält. Weiterhin ist die Anzahl der Dimensionen nicht beschränkt. Jede n-dimensionale Mannigfaltigkeit lässt sich zerlegen in eine vierdimensionale Mannigfaltigkeit und eine interne, kompakte Mannigfaltigkeit, also etwa

$$M_n := M_4 \times M_{n-4}, \tag{1.2}$$

wobei als kompakte Mannigfaltigkeiten beispielsweise n-dimensionale Sphären, Tori oder Calabi–Yau Mannigfaltigkeiten in Frage kommen [10, 11].

In [12] wurde nun das Problem angegangen, eine kompaktifizierte zehndimensionale Typ IIA Supergravitation, also die niederenergetische Theorie einer Typ IIA Stringtheorie, mit Hintergrundflüssen auf einer $K3$ Mannigfaltigkeit, von zehn auf sechs Dimensionen zu reduzieren. Dabei bezeichnet $K3$ eine kompakte, Ricci flache komplexe Mannigfaltigkeit mit $SU(2)$-Holonomie [13]. (Tatsächlich ist $K3$ die einzige solche Mannigfaltigkeit mit $SU(2)$-Holonomie.) Bei dieser Kompaktifizierung tauchen 16 Superladungen auf, so dass diese Supergravitation auch als $\mathcal{N} = 4$ Supergravitation bezeichnet wird.

Nach der Reduktion von zehn auf sechs Dimensionen lässt sich die Theorie von sechs auf vier Dimensionen reduzieren [14], indem man als interne Mannigfaltigkeit einen zweidimensionalen Torus T^2 verwendet; also setzt man an

$$M_6 = M_4 \times T^2, \tag{1.3}$$

wobei alle Felder unabhängig von den Variablen des Torus sind, so dass die Ableitungen nach diesen verschwinden. Reduziert man die sechsdimensionale Theorie auf einem Torus, so enthält die Wirkung neben den Feldern, die bereits in der sechsdimensionalen Theorie auftreten, neue Felder. Diese entstehen einerseits durch die sechsdimensionale Metrik, genauso wie in der ursprünglichen Arbeit von Kaluza und Klein die reduzierte Theorie ein $U(1)$ Vektorfeld enthält, welches in der fünfdimensionalen Metrik eingetragen war.

Andererseits werden neue Felder dadurch erzeugt, dass man die sechsdimensionalen Felder in einen zwei- und einen vierdimensionalen Teil separiert. Zuerst werden die grundlegenden Methoden der Kaluza-Klein Reduktion auf einem Torus T^2 sowie deren Ergebnisse in dieser Arbeit dargestellt, da sie essentiell ist, um weiter arbeiten zu können.

Auf der anderen Seite wurde in [15] die allgemeine Wirkung einer vierdimensionalen $\mathcal{N} = 4$ massiven Supergravitation vorgestellt, welche im weiteren Verlauf der Arbeit kurz resümiert und dessen Feldgehalt angegeben wird. Die Aufgabe, die bleibt und hier bearbeitet wird, ist die reduzierte Theorie aus [14] mit der Wirkung aus [15] zu vergleichen, was konkret heißt, alle Felder, die in [14] auftreten, mit den Feldern, die in [15] erscheinen, zu identifizieren, um die Wirkung der reduzierten Theorie als Wirkung der $\mathcal{N} = 4$ Theorie zu schreiben. Allerdings ist dies nicht ohne Weiteres möglich. Der kinetische Wirkungsterm der $\mathcal{N} = 4$ Theorie steht in der dualisierten Form, was bedeutet, dass weder magnetische Vektoren noch Zweiformfelder, sondern nur elektrische Vektoren und Skalare auftreten. In der reduzierten Theorie hingegen sind magnetische Vektoren und Zweiformen vorhanden, so dass es notwendig ist, eine Dualisierung durchzuführen, um die beiden Wirkungen zu vergleichen. Für eine beliebige p-Form in d Dimensionen ist es jederzeit möglich zu der Beschreibung durch das Poincaré Duale zu gehen. Eine masselose p-Form beschreibt in d Dimensionen $\binom{d-2}{p}$ physikalische Freiheitsgrade, so dass eine masselose Zweiform in vier Dimensionen $\binom{2}{2}$ Freiheitsgerade besitzt. Da $\binom{2}{2} = \binom{2}{0}$ gilt, folgt, dass die Wirkung einer Zweiform äquivalent zu der Wirkung eines Skalars ist. Weiterhin taucht in der Wirkung der reduzierten Theorie der masselosen Supergravitation ein magnetischer Vektor auf, der genauso wie ein elektrische Vektor $\binom{2}{1}$ Freiheitsgerade besitzt. Deshalb ist es möglich, zu elektrischen Vektoren überzugehen, so dass die masselose Wirkung der reduzierten Theorie nur noch durch Skalare sowie elektrische Vektoren und nicht mehr durch Zweiformen sowie magnetische Vektoren beschrieben wird. Tatsächlich wird sich dann herausstellen, dass die masselose reduzierte Theorie [14] mit der Wirkung aus [15] verglichen werden kann und es wird möglich sein, die Felder aus den entsprechen Wirkungen miteinander zu identifizieren. Im massiven Fall kommen neben den Feldern, die in der massiven Theorie erscheinen, noch zusätzliche Konstanten vor, die proportional zu den Massetermen sind und ebenso durch den Vergleich der reduzierten Wirkung mit der $\mathcal{N} = 4$ Theorie bestimmt werden. Dies wird der erste Schritt im massiven Fall sein. Um dann allerdings die beiden Wirkungen miteinander vergleichen zu können, ist wieder notwendig, Dualsierungen durchzuführen. Im massiven Fall beschreibt eine p-Form in d Dimensionen $\binom{d-1}{p}$ physikalische Freiheitsgrade. Dieser Unterschied zum masselosen Fall kann durch einen Higgs Mechanismus verstanden werden, bei dem eine p-Form eine masselose $(p-1)$-Form "isst" und so die Anzahl der Freiheitsgerade um $\binom{d-2}{p-1}$ ändert. Da in vier Dimensionen $\binom{3}{2} = \binom{3}{1}$ gilt, folgt, dass die Wirkung einer massiven Zweiform dual zu der Wirkung eines Vektors ist, wobei dieser als kovariante Ableitung eines skalaren Feldes angesetzt wird. Durch diese Dualisierung werden jedoch alle Zweiformen verschwinden, die in der reduzierten Theorie auftreten. Da in der allgemeinen Wirkung aus [15] jedoch Zweiformen auftauchen, werden diese Felder durch Ausnutzung ihrer Bewegungsgleichungen durch die anderen auftretenden Felder ersetzt. Danach bleiben immer noch Schritte, die durchgeführt werden müssen, um die beiden Wirkungen zu vergleichen. Es wird am Ende klar gemacht, welche Schritte bleiben, ohne diese allerings durchzuführen. Aber es zeigt sich, dass alle Größen, die in [14] auftreten, mit Größen, die in [15] erscheinen, identifiziert werden können.

Diese Arbeit wird in drei Teile aufgeteilt: der Vorstellung einer sechsdimensionalen $\mathcal{N} = 4$ Typ IIA Supergravitation sowie deren dimensionaler Reduktion, dem Vergleich der reduzierten Wirkung mit der $\mathcal{N} = 4, D = 4$ Theorie und einer abschließender Zusammenfassung sowie einem Ausblick.

Im zweiten Kapitel wird die sechsdimensionale $\mathcal{N} = 4$ Supergravitation und dessen Reduktion betrachtet. In [12] wurde eine zehndimensionale Typ IIA Supergravitation auf $K3$ kompaktifiziert und auf sechs Dimensionen reduziert. Es wird die Wirkung sowie der Feldgehalt dieser Theorie als Ausgangspunkt der dimensionalen Reduktion dargestellt, wobei nicht die gesamte Wirkung, die aus einem bosonischen und einem fermionischen Anteil besteht, betrachtet wird, sondern nur die bosonische Wirkung dieser Theorie interessiert. (Der fermionische Anteil kann jederzeit durch Ausnutzung der Supersymmetrie hergeleitet werden, wird hier jedoch nicht benötigt.) Daraufhin wird die Kaluza-Klein Reduktion, die notwendig ist, um diese sechsdimensionale Theorie auf vier Raumzeitdimensionen zu reduzieren, vorgestellt. Nach einer allgemeinen Einführung in das Prinzip der Reduktion, werden die entsprechenden Ergebnisse der Reduktion der $\mathcal{N} = 4, D = 6$ Supergravitation präsentiert [14], wobei dies in zwei Schritten erfolgt. Zunächst werden die masselose Theorie betrachtet und alle notwendigen Definitionen und Erklärungen vorgestellt. Daraufhin wird der massive Fall untersucht, wobei insbesondere darauf geachtet wird, wie sich die Situation ändert, wenn man alle Massen anschaltet und welche Ergebnisse sich ergeben, wenn man die gleichen Definitionen wie im masselosen Fall verwendet.

Im dritten Kapitel wird die $\mathcal{N} = 4, D = 4$ Supergravitation mit den Ergebnissen der dimensionalen Reduktion aus dem zweiten Kapitel verglichen. Genauso wie die Reduktion selbst in zwei Teilschritte aufgespalten worden ist, wird dieses Problem in zwei Schritten aufgeteilt. Zuerst wird nur der masselose Fall betrachtet. Bevor allerdings der Vergleich beider Wirkungen durchgeführt werden kann, wird zunächst die Wirkung der allgemeinen masselosen $\mathcal{N} = 4$ Supergravitation in vier Dimensionen vorgestellt, wie sie in [15] beschrieben ist, wobei neben dem Wirkungsterm auch alle Felder präsentiert werden, die in diesem auftauchen. Nach dieser kurzen Darstellung wird der Vergleich dieser $\mathcal{N} = 4$ Wirkung mit der Wirkung aus Kapitel zwei vollführt. Dies wird allerdings nicht ohne weitere Berechnungen möglich sein, da in der masselosen $\mathcal{N} = 4$ Supergravitation weder Terme für Zweiformen noch für magnetische Vektoren auftreten. Also wird zunächst die Dualisierung durchgeführt, die die Zweiform, die in [14] auftritt, in einen skalaren Term überführt sowie den einen auftauchenden magnetischen Vektor in einen elektrischen Vektor. Nach diesen beiden Berechnungen wird es möglich sein, beide Theorien zu vergleichen und die Felder, die in [15] auftreten, so zu bestimmen, dass die resultierende Wirkung aus dem zweiten Kapitel in der Form geschrieben werden kann, dass sie mit jener Theorie übereinstimmt. In der $\mathcal{N} = 4$ Theorie treten allerdings zusätzlich sogenannte Strukturkonstanten auf, sobald man den massiven Fall betrachtet. Da diese Konstanten nur im massiven Fall vorkommen, können sie beim Vergleich der masselosen Theorien nicht bestimmt werden, so dass es notwendig ist, zusätzlich die massive Theorie zu betrachten. Nachdem zunächst die allgemeine massive Wirkung der $\mathcal{N} = 4$ Supergravitation in vier Dimensionen und alle zusätzlichen Definitionen, die im masselosen Fall nicht auftauchen, präsentiert worden sind, wird es zunächst möglich sein, diese Strukturkonstanten zu bestimmen. Damit bleibt die Aufgabe, die Wirkung, die sich als Reduktion der massiven $\mathcal{N} = 4, D = 6$ Supergravitation auf einem Torus T^2 ergibt, so zu schreiben, dass sie mit der $\mathcal{N} = 4, D = 4$ Theorie identifiziert werden kann. Innerhalb dieser Arbeit wird allerdings nur der Anfang gemacht; weitere Berechnungen werden notwendig sein, um diese Aufgabe schließlich zu vollenden.

Im letzten Kapitel schließlich werden alle Ergebnisse, die im dritten Kapitel gewonnen worden sind, vorgestellt. Dabei wird kurz betrachtet, welche Berechnungen notwendig gewesen sind, um die entsprechenden Resultate zu erhalten. Weiterhin wird man sehen, dass zwar alle Komponenten der vierdimensionalen Supergravitation bestimmt werden können, es aber nicht möglich gewesen ist, die Ergebnisse von [14] in der Art und Weise zu schreiben, dass die Wirkung wie in [15] erscheint. Abschließend muss man also noch überlegen, welche weiteren Untersuchungen nötig sind, um diese Aufgabe zu beenden.

Kapitel 2

Kaluza-Klein Reduktion einer sechsdimensionalen Supergravitation

Bevor man die Ergebnisse der Reduktion der sechsdimensionalen Supergravitation auf vier Dimensionen mit den Formeln von Weidner und Schön [15] vergleichen kann, wird die reduzierte Theorie vorgestellt, wobei als erstes von Interesse ist, welchen Feldgehalt sie besitzt. Außerdem ist es wichtig zu sehen, welche Konventionen und Notationen sie neben den in Anhang A aufgelisteten beinhaltet, was wichtig ist, um beide Theorien miteinander vergleichen zu können. In der gesamten Arbeit wird nur der bosonische Anteil der Wirkungen betrachtet, wobei es jederzeit möglich, aber nicht notwendig ist, den fermionischen Anteil durch Ausnutzung der Supersymmetrie zu erlangen. Überdies wird die Kaluza-Klein Reduktion und ihre Wirkungsweise vorgestellt, wobei die konkreten Berechnungen bereits in [14] durchgeführt wurden. Diese Darstellung wird in zwei Schritten vollführt. Zunächst werden alle Massen gleich null gesetzt und nur der masselose Fall betrachtet, bevor man im darauffolgenden Abschnitt den massiven Anteil anschauen kann. Diese Aufteilung ist notwendig, da der spätere Vergleich dieser Theorie mit den Formeln von Weidner und Schön erst für die masselose Theorie durchgeführt wird, um einen Großteil aller auftretenden Felder zu bestimmen. Erst danach wird der massive Fall betrachtet, um diesen Vergleich abzuschließen.

2.1 Sechsdimensionaler Ausgangspunkt

In [12] wurde eine zehndimensionale Supergravitation vom massiven Typ IIA auf einer $K3$ Mannigfaltigkeit kompaktifiziert, wobei alle Ramond-Ramond

Hintergrundflüsse berücksichtigt wurden. Die resultierende sechsdimensionale Theorie, die ein Spezialfall der allgemeinen sechsdimensionalen Supergravitation ist, lautet

$$
\begin{aligned}
\hat{S} &= \int_{M_6} \Big[\frac{1}{4}\Big(\hat{R}^*1 + 4d\hat{\Phi}\wedge^* d\hat{\Phi} - 2\hat{H}^{(3)}\wedge^* \hat{H}^{(3)} + \frac{1}{8}Tr(dM^{-1}\wedge^* dM)\Big) \\
&- \frac{1}{2}\hat{F}^{(2)I}\wedge^* \hat{F}^{(2)J}(M^{-1})_{IJ} + \hat{B}^{(2)}\wedge \hat{F}^{(2)I}\wedge \hat{F}^{(2)J}L_{IJ} \\
&- \frac{1}{2}m^I(M^{-1})_{IJ}\, {}^*m^J - m^I L_{IJ}\hat{B}^{(2)}\wedge\hat{B}^{(2)}\wedge\hat{F}^{(2)J} \\
&+ \frac{4}{3}\left(\hat{B}^{(2)}\right)^3 m^I L_{IJ} m^J\Big] \qquad (2.1.1)
\end{aligned}
$$

oder in Koordinatenschreibweise[1], die innerhalb dieser Arbeit verwendet und mit der weitergearbeitet wird:

$$
\begin{aligned}
\hat{S} &= \int_{M_6} d^6\hat{x}\,\sqrt{-\hat{g}}\Big[\frac{1}{4}e^{-2\hat{\Phi}}\Big(-\hat{R} - 4\partial_{\hat{\mu}}\hat{\Phi}\partial^{\hat{\mu}}\hat{\Phi} + \frac{1}{3}\hat{H}_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\varrho}}\hat{H}^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\varrho}} \\
&- \frac{1}{8}\partial_{\hat{\mu}}(M^{-1})_{IJ}\partial^{\hat{\mu}}M^{IJ}\Big) + \frac{1}{4}\hat{F}^I_{\hat{\mu}\hat{\nu}}\hat{F}^{\hat{\mu}\hat{\nu}J}(M^{-1})_{IJ} + \frac{1}{2}m^I(M^{-1})_{IJ}m^J\Big] \\
&+ \int_{M_6} d^6\hat{x}\,\epsilon^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\varrho}\hat{\sigma}\hat{\kappa}\hat{\lambda}}\Big(\frac{1}{8}\hat{B}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}\hat{F}^I_{\hat{\varrho}\hat{\sigma}}\hat{F}^J_{\hat{\kappa}\hat{\lambda}}L_{IJ} - \frac{1}{8}\hat{B}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}\hat{B}_{\hat{\varrho}\hat{\sigma}}\hat{F}^J_{\hat{\kappa}\hat{\lambda}}m^I L_{IJ} \\
&+ \frac{1}{6}\hat{B}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}\hat{B}_{\hat{\varrho}\hat{\sigma}}\hat{B}_{\hat{\kappa}\hat{\lambda}}m^I L_{IJ}m^J\Big), \qquad (2.1.2)
\end{aligned}
$$

wobei $\hat{x}^{\hat{\mu}} \in M_6$ sechsdimensionale Koordinaten mit Indizes $\hat{\mu}, \hat{\nu}, \hat{\varrho}, \hat{\sigma}, \hat{\kappa}, \hat{\lambda} \in \{0, ...5\}$ bezeichnet. Hier und im Verlauf der weiteren Arbeit wird über doppelt auftretende Indizes gemäß der Einsteinschen Summenkonvention summiert.

$\hat{R}$ bezeichnet den sechsdimensionalen Ricci Skalar und $\hat{\Phi}$ das Dilaton, während $\hat{F}^I_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ und $\hat{H}_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\varrho}}$ die Feldstärken der sechsdimensionalen Felder $\hat{A}^I_{\hat{\mu}}$ und $\hat{B}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ angeben und definiert sind als

$$
\begin{aligned}
\hat{H}_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\varrho}} &:= \partial_{\hat{\mu}}\hat{B}_{\hat{\nu}\hat{\varrho}} + \partial_{\hat{\varrho}}\hat{B}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} + \partial_{\hat{\nu}}\hat{B}_{\hat{\varrho}\hat{\mu}}, \qquad (2.1.3)\\
\hat{F}^I_{\hat{\mu}\hat{\nu}} &:= \partial_{\hat{\mu}}\hat{A}^I_{\hat{\nu}} - \partial_{\hat{\nu}}\hat{A}^I_{\hat{\mu}} + 2m^I\hat{B}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}, \qquad (2.1.4)
\end{aligned}
$$

wobei $m^I, I = 1, ..., 24$, die Massenparameter sind. (Anstatt I werden für diesen Fall auch die Indizes $J, K, L = 1, ..., 24$ verwendet.) Weiterhin gibt es 80 Skalare $\hat{\theta}^q(\hat{x}), q = 1, ..., 80$, die die Matrix M parametrisieren.

[1] Eine Einführung in den Umgang mit Differentialformen ist in [16] dargestellt.

Insgesamt kann man nun alle Felder dieser Theorie zählen und gliedern in:

1. Skalarfelder: Es gibt 81 Skalarfelder: Ein Dilaton $\hat{\Phi}$ und 80 weitere Skalare, die $(M^{-1})_{IJ}$ parametrisieren.

2. Vektorfelder: Es gibt 24 Vektorfelder $\hat{A}^I_{\hat{\mu}}$.

3. Graviton: Es existiert ein Graviton $\hat{g}^{\hat{\mu}\hat{\nu}}$.

4. Zweiformfeld: Es gibt ein Zweiformfeld $\hat{B}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$.

M kann geschrieben werden als

$$M^{-1} =: \mathcal{V}^T\mathcal{V}\ , \mathcal{V} \in O(4,20). \tag{2.1.5}$$

Die Matrizen M und $\mathcal{V}$ erfüllen dabei die folgenden Beziehungen

$$\mathcal{V}L\mathcal{V}^T = L,\ MLM^T = L,\ M^T = M, \tag{2.1.6}$$

wobei L_{IJ} als Metrik von $O(4,20)$ definiert ist als

$$L_{IJ} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \omega & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.1.7}$$

mit ω als Metrik mit Signatur $(3,19)$, die beschrieben werden kann durch die 16 - dimensionale Einheitsmatrix E_{16} und einer Matrix σ

$$\omega := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma \\ 0 & I_{16} & 0 \\ \sigma & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{mit } \sigma := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.1.8}$$

Im masselosen Fall $m^I \to 0$ ist die Wirkung (2.1.2) identisch zu einer masselosen Supergravitation, die generiert wird, indem man die masselose Theorie von Typ IIA auf einer $K3$ Mannigfaltigkeit kompaktifiziert [17]. Insbesondere reduziert sich (2.1.4) zu einer gewöhnlichen Feldstärke, so dass es im masselosen Fall Eichtransformationen der Form

$$\delta\hat{A}^I_{\hat{\mu}} = \partial_{\hat{\mu}}\Lambda^I,\ \delta\hat{B}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \partial_{\hat{\mu}}\Omega_{\hat{\nu}} - \partial_{\hat{\nu}}\Omega_{\hat{\mu}} \tag{2.1.9}$$

gibt, wobei Λ^I and $\Omega_{\hat{\nu}}$ beliebige Funktionen sein können, solange sie differenzierbar sind.

Im massiven Fall können diese Eichtransformationen nicht mehr angewandt werden, da (2.1.4) die Zweiform $\hat{B}$ ohne Ableitung enthält. Allerdings ist die massive Theorie invariant unter den sogenannten Stückelberg Eichtransformationen:

$$\delta \hat{A}^I_{\hat{\mu}} = -2m^I \Omega_{\hat{\mu}}, \ \delta \hat{B}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \partial_{\hat{\mu}} \Omega_{\hat{\nu}}, \tag{2.1.10}$$

wobei $\Omega_{\hat{\nu}}$ ein differenzierbares Vektorfeld bezeichnet. Die Eichtransformation

$$\delta \hat{A}^I_{\hat{\mu}} = \partial_{\hat{\mu}} \Lambda^I \tag{2.1.11}$$

mit einem beliebigen Skalarfeld Λ^I hingegen bleibt weiterhin möglich.

Weiterhin ist die Wirkung (2.1.2) invariant unter globalen $O(4,20)$ Transformationen

$$\begin{aligned} M \to UMU^T \quad &, \quad \hat{A}^I \to U^I{}_J \hat{A}^J, \ \hat{B} \to \hat{B} \\ \hat{\Phi} \to \hat{\Phi} \quad &, \quad \hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} \to \hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}, \end{aligned} \tag{2.1.12}$$

mit $U \in O(4,20)$.

2.2 Kaluza-Klein Reduktion im Allgemeinen

Bevor die Schritte, die nötig sind, um eine sechsdimensionale Supergravitation auf vier Dimensionen zu reduzieren, vorgestellt werden, wird die grundsätzliche Idee der Reduktion präsentiert. Als Ausgangspunkt wird die sechsdimensionale Mannigfaltigkeit M_6 als Produkt einer vierdimensionalen Mannigfaltigkeit M_4 und eines Torus T^2 angesetzt:

$$M_6 := M_4 \times T^2, \tag{2.2.1}$$

wobei man dementsprechend für die Koordinaten

$$\hat{x}^{\hat{\mu}} := (x^\mu, y^a), \ \hat{x}^{\hat{\mu}} \in M_6, \ x^\mu \in M_4, \ y^a \in T^2, \tag{2.2.2}$$

mit $\mu \in \{0, ..., 3\}$ und $a \in \{4, 5\}$[2] definiert, wobei alle Größen, die ein Dach besitzen, sechsdimensional sind. Als Beispiel wird die Klein-Gordon Gleichung in sechs Dimensionen betrachtet [14]

$$(\hat{\Delta} - m_6^2)\hat{\Psi}(\hat{x}) = 0, \tag{2.2.3}$$

[2]Genauso werden auch die Indizes $\nu, \varrho, \sigma, \kappa\lambda$ als vierdimensionale und b, c, d als zweidimensionale Indizes verwendet.

wobei $\hat{\Delta}$ den sechsdimensionalen Laplaceoperator $\hat{\Delta} := \partial_{\hat{\mu}}\partial^{\hat{\mu}}$ bezeichnet, wohingegen m_6 die Masse eines beliebigen Skalarfeldes $\hat{\Psi}(\hat{x})$ ist. O.B.d.A. kann man zunächst annehmen, dass die sechsdimensionale Metrik blockdiagonal ist, so dass man den folgenden Ansatz für den sechsdimensionalen Laplaceoperator machen kann:

$$\hat{\Delta} := \Delta_4 + \Delta_2, \tag{2.2.4}$$

wobei $\Delta_4 := \partial_\mu \partial^\mu$ und $\Delta_2 := \partial_a \partial^a$ die Laplaceoperatoren von M_4 und T^2 sind. Wegen (2.2.2) und der Periodizität des Torus T^2 kann man einen Ansatz für das Feld $\hat{\Psi}$ machen:

$$\hat{\Psi}(\hat{x}) = \sum_{n_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{+\infty} \Psi_{n_1,n_2}(x) e^{\frac{2\pi i n_1 y^4}{L_1}} e^{\frac{2\pi i n_2 y^5}{L_2}}, \tag{2.2.5}$$

wobei L_1 und L_2 die Halbachsen des Torus und Ψ_{n_1,n_2} die Fouriermoden von $\hat{\Psi}$ darstellen. Wegen der Linearität von Δ_2 und der Unabhängigkeit von $\Psi(x)$ von y erhält man

$$\Delta_2 \left(e^{\frac{2\pi i n_1 y^4}{L_1}} e^{\frac{2\pi i n_2 y^5}{L_2}} \right) = \left[- \left(\frac{2\pi n_1}{L_1} \right)^2 - \left(\frac{2\pi n_2}{L_2} \right)^2 \right] e^{\frac{2\pi i n_1 y^4}{L_1}} e^{\frac{2\pi i n_2 y^5}{L_2}} \tag{2.2.6}$$

und bekommt die folgende Gleichung, indem man diese Formel zusammen mit (2.2.5) und (2.2.4) in (2.2.3) einsetzt

$$0 = \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{n_2 \in \mathbb{Z}} (\Delta_4 - m_{n_1,n_2}^2) \Psi_{n_1,n_2}(x) e^{\frac{2\pi i n_1 y^4}{L_1}} e^{\frac{2\pi i n_2 y^5}{L_2}} \tag{2.2.7}$$

mit $m_{n_1,n_2}^2 := m_6^2 + \left(\frac{2\pi n_1}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{2\pi n_2}{L_2}\right)^2$ als eine Masse, die von den Zahlen $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ der Fouriermoden abhängt. Da alle Fouriermoden Ψ_{n_1,n_2} voneinander unabhängig sind, verschwindet diese Summe gerade dann, wenn jeder Summand verschwindet, so dass man erhält

$$0 = (\Delta_4 - m_{n_1,n_2}^2) \Psi_{n_1,n_2}(x) \ \forall n_i \in \mathbb{Z}, i \in \{1,2\}. \tag{2.2.8}$$

Dies ist gerade die Klein-Gordon Gleichung für Skalarfelder $\Psi_{n_1,n_2}(x)$ in vier Dimensionen mit Massen m_{n_1,n_2}, die von $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ abhängen. Da vom Torus angenommen wird, dass er sehr klein ist, setzt man $L_i \to 0,\ i \in \{1,2\}$, so dass man sehr massive Teilchen erhielte, die allerdings nicht beobachtet werden. Um die effektive Theorie zu erhalten, setzt man $n_1, n_2 \equiv 0$ und definiert

$$\Psi(x) := \Psi_{0,0}(x) := \hat{\Psi}(x^\mu, y^a)|_{y^a \equiv 0}. \tag{2.2.9}$$

In genau derselben Art und Weise werden alle Felder, auch Ein- und Zweiformfelder, unabhängig von $y^a \in T^2$ angesetzt, so dass alle Ableitungen nach den Koordinaten y^a verschwinden.

Im nächsten Abschnitt wird eine solche Reduktion exemplarisch für das Dilaton durchgeführt, um darzustellen, welche Schritte hauptsächlich verwendet werden, um (2.1.2) auf vier Dimensionen zu reduzieren.

2.3 Ein Beispiel: Reduktion des kinetischen Terms des Dilaton $\hat{\Phi}$

In diesem Abschnitt wird kurz dargestellt, wie die Kaluza-Klein Reduktion konkret angewandt werden kann. Zu diesem Zweck betrachtet man den kinetische Wirkungsterm des Dilatons $\hat{\Phi}$

$$\hat{S}_{\hat{\Phi}} = -\int_{M_6} d^6\hat{x}\ \sqrt{-\hat{g}}e^{-2\hat{\Phi}}\hat{g}^{\hat{\mu}\hat{\nu}}\partial_{\hat{\mu}}\hat{\Phi}\partial_{\hat{\nu}}\hat{\Phi}. \tag{2.3.1}$$

In (2.1.2) sieht man, dass die Exponentialfunktion $e^{-2\hat{\Phi}}$ auch mit dem sechsdimensionalen Ricci Skalar $\hat{R}$ multipliziert wird, so dass eine Weyl Reskalierung bezüglich der sechsdimensionalen Metrik $\hat{g}^{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ in der Form

$$\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} \to e^{\hat{\Phi}}\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} \tag{2.3.2}$$

durchgeführt werden muss, um den kanonischen Einstein-Hilbert Term

$$-\frac{1}{4}\int_{M_6} d^6\hat{x}\ \sqrt{-\hat{g}}\hat{R} \tag{2.3.3}$$

zu bekommen. Wendet man diese Reskalierung auf (2.3.1) an, ergibt sich

$$\hat{S}_{\hat{\Phi}} = -\int_{M_6} d^6\hat{x}\ \sqrt{-\hat{g}}\hat{g}^{\hat{\mu}\hat{\nu}}\partial_{\hat{\mu}}\hat{\Phi}\partial_{\hat{\nu}}\hat{\Phi}, \tag{2.3.4}$$

wobei man berücksichtigen muss, dass mit Hilfe von (2.3.2) auch die Inverse $\hat{g}^{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ sowie die Determinante $\sqrt{-\hat{g}}$ entsprechend reskaliert werden müssen. Um nun die sechsdimensionale Theorie auf vier Dimensionen zu reduzieren, kann man folgenden Ansatz für die sechsdimensionale Metrik machen[3]:

$$\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} := \begin{pmatrix} \hat{g}_{\mu\nu} & \hat{g}_{\mu b} \\ \hat{g}_{a\nu} & \hat{g}_{ab} \end{pmatrix}, \tag{2.3.5}$$

[3] Dies unterscheidet sich von der Metrik, wie sie in [14, 18] gegeben ist, durch die Reskalierung $V_\mu^a \to \sqrt{2}V_\mu^a$, welche für den späteren Vergleich erforderlich sein wird.

wobei die einzelnen Einträge gegeben sind durch

$$\begin{aligned}
\hat{g}_{\mu\nu} &:= g_{\mu\nu} + 2h_{ab}V_\mu^a V_\nu^b && (2.3.6)\\
\hat{g}_{\mu b} &:= \sqrt{2}h_{ab}V_\mu^a && (2.3.7)\\
\hat{g}_{a\nu} &:= \sqrt{2}h_{ab}V_\nu^b && (2.3.8)\\
\hat{g}_{ab} &:= h_{ab}. && (2.3.9)
\end{aligned}$$

Die Inverse dieser Metrik ist gegeben durch

$$\hat{g}^{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \begin{pmatrix} g^{\mu\nu} & -\sqrt{2}h^{ab}V_a^\mu \\ -\sqrt{2}h^{ab}V_b^\nu & h^{ab} + 2g^{\mu\nu}V_\mu^a V_\nu^b \end{pmatrix}. \tag{2.3.10}$$

V_μ^a werden Kaluza-Klein Vektorfelder genannt, wohingegen h_{ab} die Metrik der internen Mannigfaltigkeit T^2 und $g_{\mu\nu}$ die Metrik von M_4 darstellen. Damit lässt sich die Summe $\hat{g}^{\hat{\mu}\hat{\nu}}\partial_{\hat{\mu}}\hat{\Phi}\partial_{\hat{\nu}}\hat{\Phi}$ aufspalten, so dass man erhält

$$\begin{aligned}
\hat{S}_{\hat{\Phi}} &= -\int\limits_{M_6} d^6\hat{x}\ \sqrt{-\hat{g}}\Big(\hat{g}^{\mu\nu}\partial_\mu\hat{\Phi}\partial_\nu\hat{\Phi} + \hat{g}^{a\nu}\partial_a\hat{\Phi}\partial_\nu\hat{\Phi} \\
&+ \hat{g}^{\mu b}\partial_\mu\hat{\Phi}\partial_b\hat{\Phi} + \hat{g}^{ab}\partial_a\hat{\Phi}\partial_b\hat{\Phi}\Big). && (2.3.11)
\end{aligned}$$

Wie bereits in Abschnitt 2.2 beschrieben wurde, ist das Dilaton nur auf der Mannigfaltigkeit M_4, jedoch nicht auf T^2 definiert, so dass

$$\Phi(x) := \hat{\Phi}(x,y)|_{y\equiv 0} \tag{2.3.12}$$

und alle Ableitungen nach y verschwinden. Weiterhin ist bekannt, dass für die Determinante der sechsdimensionalen Metrik $\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ der folgende Ansatz gemacht werden kann [14, 18]

$$\sqrt{-\hat{g}} = \sqrt{-g}\sqrt{h}, \tag{2.3.13}$$

wobei h gerade die Determinante der Metrik h_{ab} des Torus T^2, die ebenfalls nur von x abhängt, bezeichnet. Mit (2.3.12) und (2.3.13) wird (2.3.11) zu

$$\hat{S}_\Phi = -\int\limits_{M_6} d^6\hat{x}\ \sqrt{-g}\sqrt{h}g^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi, \tag{2.3.14}$$

wobei ausgenutzt wurde, dass der Eintrag $\hat{g}^{\mu\nu}$ der sechsdimensionalen Metrik gerade die vierdimensionale Metrik $g^{\mu\nu}$ enthält (2.3.10). Benutzt man weiterhin den Produktansatz (2.2.1) lässt sich die Integration wie folgt aufspalten

$$\int\limits_{M_6} d^6\hat{x} = \int\limits_{M_4} d^4x \int\limits_{T^2} d^2y, \tag{2.3.15}$$

wobei man wegen der Periodizität von T^2 setzen kann

$$\int_{T^2} d^2y \equiv 1. \tag{2.3.16}$$

Damit bekommt man tatsächlich die vierdimensionale Wirkung, die das Dilaton auf M^4 enthält:

$$S_\Phi = -\int_{M_4} d^4x \,\sqrt{-g}\sqrt{h}g^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi. \tag{2.3.17}$$

Um die Determinante der Metrik h_{ab} verschwinden zu lassen, so dass nur noch die Determinante der vierdimensionalen Metrik $g_{\mu\nu}$ auftritt, ist es notwendig eine Matrix N_{ab} einzuführen, indem man die Metrik h_{ab} wie folgt reskaliert

$$N_{ab} := h_{ab}e^{\varphi}, \tag{2.3.18}$$

wobei die Determinante $N := \det(N_{ab})$ die Eigenschaft

$$N \equiv 1 \tag{2.3.19}$$

besitzt. Mit Hilfe der Reskalierung (2.3.18) ergibt sich die Determinante von h_{ab} zu

$$\sqrt{h} = \sqrt{N}e^{-\varphi} = e^{-\varphi}, \tag{2.3.20}$$

so dass ein neues Skalarfeld φ in der Wirkung des Dilatons auftritt. Eine genauere Berechnung zeigt, dass dieses Feld auch im Einstein-Hilbert Term auftritt [14]. Zum späteren Vergleich ist es jedoch notwendig, dass diese Exponentialfunktion nicht in dieser Wirkung auftritt. Dies macht es erforderlich, eine weitere Weyl Reskalierung durchzuführen, wobei dieses Mal nur die vierdimensionale Metrik $g^{\mu\nu}$ reskaliert wird[4]

$$g^{\mu\nu} \to e^{-\varphi}g^{\mu\nu}, \tag{2.3.21}$$

so dass man schließlich die gesamte kinetische Wirkung des Dilatons Φ in vier Dimensionen erhält

$$S_\Phi = -\int_{M_4} d^4x \,\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi. \tag{2.3.22}$$

[4]Es werden also insgesamt zwei Weyl Reskalierungen durchgeführt, wobei man darauf achten muss, dass die erste Reskalierung auf die sechsdimensionale Metrik vor der Reduktion und die zweite Reskalierung auf die vierdimensionale Metrik nach der Reduktion angewandt wird.

Bevor nun im nächsten Abschnitt das Ergebnis der Reduktion der masselosen Theorie vorgestellt wird, werden noch einmal kurz die Hauptargumentationspunkte der Reduktion zusammengefasst. Im ersten Schritt war es wichtig, die sechsdimensionale Metrik wegen des Auftretens des Feldes Φ in der Einstein-Hilbert Wirkung einer Weyl Reskalierung zu unterziehen, woraufhin es möglich ist, alle Summen, die $\hat{\mu}$ enthalten, mit Hilfe der Indizes $\mu \in M_4$ und $a \in T^2$ aufzuspalten. Dabei muss man darauf achten, dass die Metrik für die verschiedenen Indizes μ und a unterschiedliche Einträge besitzt, die nach der Aufspaltung in die Wirkung eingesetzt werden. Genauso muss man berücksichtigen, dass alle Ableitungen nach den internen Koordinaten y^a verschwinden, so dass die entstehende Wirkung nur noch von den Koodinaten x^μ der Mannigfaltigkeit M_4 abhängt. Weiterhin erscheint die Determinante der Metrik des Torus T^2, die zwar durch eine Reskalierung verschwindet, durch die jedoch ein neues Feld φ erscheint. Damit dieser Skalar nicht mehr in der Einstein-Hilbert Wirkung vorkommt, wird eine weitere Weyl Reskalierung durchgeführt, die in diesem Fall nur noch die vierdimensionale Metrik $g^{\mu\nu}$ betrifft, da die sechsdimensionale Metrik zu jenem Zeitpunkt nicht mehr auftaucht. Nach dieser Reskalierung schließlich bekommt man die reduzierte Wirkung des Dilatons, welche nur noch vierdimensional und nicht mehr sechsdimensional ist.

2.4 Reduktion der masselosen Theorie

In diesem Abschnitt wird das Ergebnis der Reduktion der masselosen sechsdimensionalen Theorie präsentiert. Setzt man alle Massen zu null, wird (2.1.2) zu

$$\begin{aligned}\hat{S}_{m\equiv 0} \quad := \quad & \int_{M_6} d^6\hat{x}\, \sqrt{-\hat{g}}\Big[\frac{1}{4}e^{-2\hat{\Phi}}\Big(- \hat{R}(\hat{x}) - 4\partial_{\hat{\mu}}\hat{\Phi}\partial^{\hat{\mu}}\hat{\Phi} + \frac{1}{3}\hat{H}_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\varrho}}\hat{H}^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\varrho}} \\ - \quad & \frac{1}{8}\partial_{\hat{\mu}}(M^{-1})_{IJ}\partial^{\hat{\mu}}M^{IJ}\Big) + \frac{1}{4}\hat{F}^I_{\hat{\mu}\hat{\nu}}\hat{F}^{\hat{\mu}\hat{\nu}J}(M^{-1})_{IJ}\Big] \\ + \quad & \int_{M_6} d^6\hat{x}\; \epsilon^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\varrho}\hat{\sigma}\hat{\kappa}\hat{\lambda}}\Big(\frac{1}{8}\hat{B}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}\hat{F}^I_{\hat{\varrho}\hat{\sigma}}\hat{F}^J_{\hat{\kappa}\hat{\lambda}}L_{IJ}\Big),\end{aligned} \tag{2.4.1}$$

wobei die Feldstärke $\hat{F}^I_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ sich im masselosen Fall schreiben lässt als

$$\hat{F}^I_{\hat{\mu}\hat{\nu}} \quad := \quad \partial_{\hat{\mu}}\hat{A}^I_{\hat{\nu}} - \partial_{\hat{\nu}}\hat{A}^I_{\hat{\mu}}. \tag{2.4.2}$$

Um diese Wirkung auf vier Dimensionen zu reduzieren, muss man die gleichen Rechenschritte anwenden, wie sie im letzten Abschnitt dargestellt worden sind. Die exakte Berechnung ist dabei bereits in [14] durchgeführt worden. Hier werden nur die entsprechenden Resultate geliefert. Um die masselose sechsdimensionale Theorie zu reduzieren, muss man zunächst die sechsdimensionalen Felder in einen vier- und einen zweidimensionalen Teil aufspalten. Man setzt

$$\hat{A}^I_{\hat{\mu}} := \begin{pmatrix} \tilde{A}^I_\mu \\ A^I_a \end{pmatrix} \tag{2.4.3}$$

und

$$\hat{B}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} := \begin{pmatrix} \tilde{B}_{\mu\nu} & \tilde{C}_{\mu b} \\ \tilde{C}_{a\nu} & B_{ab} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \tilde{B}_{\mu\nu} & \tilde{C}_{\mu b} \\ \tilde{C}_{a\nu} & b\epsilon_{ab} \end{pmatrix}, \tag{2.4.4}$$

wobei für den Eintrag B_{ab} die Antisymmetrie von Zweiformen ausgenutzt wurde, so dass man den Epsilontensor ϵ_{ab} einführen kann.

Mit diesen Definitionen lässt sich die komplette Kaluza-Klein Reduktion durchführen, dessen Berechnung in

$$S_{m=0} := S_{EH} + S_{ska} + S_1 + S_2 + S_{top} \tag{2.4.5}$$

resultiert [14], wobei S_{EH} die Einstein-Hilbert Wirkung der gekrümmten Mannigfaltigkeit M_4, S_{top} einen topologischen Term und S_{ska}, S_1 sowie S_2 die kinetischen Terme der Skalarfelder, der Vektoren und der Zweiformen beschreiben. Die einzelnen Definitionen dieser Wirkung lauten

$$S_{EH} = -\frac{1}{4}\int d^4x\sqrt{-g}R(x), \tag{2.4.6}$$

$$\begin{aligned} S_1 &= \int d^4x\sqrt{-g}\Big[+ \frac{1}{8}e^{\chi-\Lambda}N_{ab}V^a_{\mu\varrho}V^{\mu\varrho b} \\ &+ \frac{1}{4}e^{-\chi-\Lambda}N^{ab}(C_{\mu\varrho a} - \sqrt{2}V^c_{\mu\varrho}b\epsilon_{ac})(C^{\mu\varrho}_b - \sqrt{2}V^{\mu\varrho d}b\epsilon_{bd}) \\ &+ \frac{1}{4}e^{\chi}(F^I_{\mu\varrho} + \sqrt{2}V^c_{\mu\varrho}A^I_c)(F^{\mu\varrho J} + \sqrt{2}V^{\mu\varrho d}A^J_d)(M^{-1})_{IJ}\Big], \end{aligned} \tag{2.4.7}$$

$$\begin{aligned} S_{top} &= \int d^4x\epsilon^{\varrho\sigma\mu\nu}\Big[\frac{1}{2}b\epsilon_{ab}\left(\frac{1}{2}F^I_{\varrho\sigma} + \sqrt{2}\partial_\varrho(V^c_\sigma A^I_c)\right)\left(\frac{1}{2}F^J_{\mu\nu} + \sqrt{2}\partial_\mu(V^d_\nu A^J_d)\right) \\ &+ \frac{1}{2}\partial_\mu\left(B_{\varrho\sigma} - \frac{1}{\sqrt{2}}V^c_\varrho C_{\sigma c} + \frac{1}{\sqrt{2}}V^d_\sigma C_{\varrho d} + 2V^c_\varrho V^d_\sigma b\epsilon_{cd}\right)A^I_a\partial_\nu A^J_b \\ &- 2\left(C_{\varrho a} - \sqrt{2}V^b_\varrho b\epsilon_{ab}\right)\left(\frac{1}{2}F^I_{\sigma\mu} + \sqrt{2}\partial_\sigma(V^d_\mu A^I_d)\right)\partial_\nu A^J_b\Big]\epsilon^{ab}L_{IJ}, \end{aligned} \tag{2.4.8}$$

$$S_{ska} = \int d^4x\sqrt{-g} \quad \Big[\quad \frac{1}{8}\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi - \frac{1}{16}(\partial_\mu N_{ab})(\partial^\mu N^{ab})$$
$$+ \quad \frac{1}{4}N^{ab}N^{cd}e^{-2\chi}(\partial_\mu b\epsilon_{ac})(\partial^\mu b\epsilon_{bd})$$
$$+ \quad \frac{1}{2}e^\Lambda N^{cd}\partial_\mu A_c^I\partial^\mu A_d^J(M^{-1})_{IJ}$$
$$+ \quad \frac{1}{8}\partial_\mu\Lambda\partial^\mu\Lambda - \frac{1}{32}\partial_\mu(M^{-1})_{IJ}\partial^\mu M^{IJ}\Big], \quad (2.4.9)$$

und

$$S_2 = \frac{1}{12}\int d^4x\sqrt{-g}e^{-2\Lambda}(\partial_\mu B_{\varrho\kappa} - \frac{1}{\sqrt{2}}C_{\mu a}V^a_{\varrho\kappa} - \frac{1}{\sqrt{2}}C_{\varrho\kappa a}V^a_\mu + \text{z.p.})$$
$$\times \quad (\partial^\mu B^{\varrho\kappa} - \frac{1}{\sqrt{2}}C_b^\mu V^{\varrho\kappa b} - \frac{1}{\sqrt{2}}C_b^{\varrho\kappa}V^{\mu b} + \text{z.p.}) \quad (2.4.10)$$

(z.P.=zyklische Permutation).

In diesen Wirkungen treten die Feldstärken

$$F^I_{\mu\nu} := \partial_\mu F^I_\nu - \partial_\nu F^I_\mu, \quad (2.4.11)$$
$$C_{\mu\nu a} := \partial_\mu C_{\nu a} - \partial_\nu C_{\mu a}, \quad (2.4.12)$$
$$V^a_{\mu\nu} := \partial_\mu V^a_\nu - \partial_\nu V^a_\mu \quad (2.4.13)$$

auf, wobei die folgenden Redefinitionen für die Felder F^I_ν, $C_{\mu a}$ und $B_{\mu\nu}$ verwendet wurden

$$F^I_\varrho := \tilde{A}^I_\varrho - \sqrt{2}V^d_\varrho A^I_d, \quad (2.4.14)$$
$$C_{\varrho a} := \tilde{C}_{\varrho a} + \sqrt{2}V^b_\varrho b\epsilon_{ab}, \quad (2.4.15)$$
$$B_{\varrho\sigma} := \tilde{B}_{\varrho\sigma} + \frac{1}{\sqrt{2}}V^a_\varrho C_{\sigma a} - \frac{1}{\sqrt{2}}V^b_\sigma C_{\varrho b} - 2V^a_\varrho V^b_\sigma b\epsilon_{ab}. \quad (2.4.16)$$

Im weiteren Text dieser Arbeit werden statt der Felder, die eine Tilde besitzen und sich direkt aus den sechsdimensionalen Feldern $\hat{A}^I_{\hat{\mu}}$ und $\hat{B}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ ableiten lassen, diese neudefinierten Felder benutzt. Die Kaluza-Klein Vektorfelder V^a_μ hingegen sind dadurch generiert worden, dass man die Metrik (2.3.5) in die masselose Theorie (2.4.1) einsetzt. Im Gegensatz zu [14] sind außerdem die Linearkombinationen

$$\chi := \Phi - \varphi, \quad (2.4.17)$$
$$\Lambda := \Phi + \varphi \quad (2.4.18)$$

eingeführt worden, welche für den späteren Vergleich der Wirkungen erforderlich sind. Damit geht (2.3.18) über in

$$N_{ab} = h_{ab} e^{\frac{1}{2}(\Lambda - \chi)}. \tag{2.4.19}$$

Jetzt kann man alle Felder wie in Kapitel 2.1 zählen und aufteilen

1. 133 Skalare: χ (1), Λ (1), N_{ab} (2), A^I_a (48), b (1), $(M^{-1})_{IJ}$ (80),
2. 28 Vektorfelder: F^I_μ (24), $C_{\mu a}$ (2), V^a_μ (2),
3. 1 Zweiformfeld: $B_{\mu\nu}$ (1),

wobei die Anzahl an Freiheitsgraden in Klammern geschrieben wurde.

Tatsächlich besitzt eine $\mathcal{N} = 4$ Supergravitation mit $n = 22$ Vektormultipletts 134 Skalare und kein Zweiformfeld. Um also diese reduzierte Theorie mit den Formeln der $\mathcal{N} = 4$ Supergravitation zu vergleichen wird es im nächsten Kapitel, das sich mit dem Vergleich beschäftigt, notwendig sein, die Wirkung des einen Zweiformfeldes zu der Wirkung eines Skalares zu dualisieren. Nach der Durchführung dieser und einiger weiterer Schritte wird es möglich sein, die reduzierte Theorie (2.4.5) mit dem allgemeinen Formalismus zu vergleichen.

2.5 Reduktion der massiven Theorie

Nachdem in den letzten drei Abschnitten dargestellt worden ist, wie die Kaluza-Klein Reduktion funktioniert und welche Ergebnisse sich für die masselose Theorie ergeben, wird nun die sechsdimensionale Wirkung (2.1.2) betrachtet, in der die Massen m^I nicht verschwinden. Die Betrachtung des massiven Falls ist notwendig, da nicht alle Größen, die in [15] für die $\mathcal{N} = 4$ Supergravitation verwendet werden, mit Hilfe der masselosen Reduktion bestimmt werden können. Bevor jedoch die komplette Theorie vorgestellt wird, wird der massive Term

$$\hat{S}_m := \frac{1}{2} \int\limits_{M_6} d^6\hat{x} \sqrt{-\hat{g}}\; m^I (M^{-1})_{IJ} m^J \tag{2.5.1}$$

reduziert.[5] Dies wird auch noch einmal zeigen, wie die Kaluza-Klein Reduktion funktioniert, um die Theorie von sechs auf vier Dimensionen auf einem

[5] Dieser Term wurde in [14] nicht berücksichtigt.

Torus T^2 zu reduzieren. Als erstes wird die Weyl Reskalierung (2.3.2) durchgeführt, so dass man bekommt:

$$\hat{S}_m = \frac{1}{2} \int d^6\hat{x}\sqrt{-\hat{g}}\; e^{3\hat{\Phi}} m^I (M^{-1})_{IJ} m^J. \tag{2.5.2}$$

Weiterhin werden die Determinante der Metrik wie in (2.3.13) und das Integral, das in (2.5.2) auftritt, wie in (2.3.15) aufgespalten. Nutzt man dann zusätzlich die Periodizität von T^2 und verwendet (2.3.16), so erhält man zunächst eine Wirkung, die man schreiben kann als

$$S_m = \frac{1}{2} \int_{M_4} d^4x\sqrt{-g}\sqrt{h} e^{3\Phi} m^I (M^{-1})_{IJ} m^J. \tag{2.5.3}$$

In weiteren Schritten kann man die Beziehungen (2.3.18) und (2.3.19) verwenden sowie überdies die Weyl Reskalierung der vierdimensionalen Metrik (2.3.21) durchführen, womit man erhält

$$S_m = \frac{1}{2} \int d^4x\sqrt{-g} e^{3\Phi+\varphi} m^I (M^{-1})_{IJ} m^J. \tag{2.5.4}$$

Diese Wirkung enthält jedoch noch die Felder Φ und φ, die bereits im masselosen Fall durch die Linearkombinationen χ (2.4.17) und Λ (2.4.18) ersetzt wurden. Setzt man diese Definitionen ein, so wird aus Gleichung (2.5.4)

$$S_m = \frac{1}{2} \int d^4x\sqrt{-g}\; e^{\chi+2\Lambda} m^I (M^{-1})_{IJ} m^J, \tag{2.5.5}$$

wobei dieser Term einen Teil des Potentials darstellt. Der andere Summand, der in diesem Term auftritt, enthält das Quadrat des Skalarfeldes b. Da im nächsten Kapitel das Potential entscheidend ist, um den Vergleich zwischen der reduzierten Theorie und den Formeln aus [15] für den massiven Fall durchzuführen, wird auch dieser Term hier explizit hergeleitet. Ausgangspunkt für diesen Wirkungsterm ist der kinetische Term des Feldes $\hat{A}^I_{\hat{\mu}}$

$$\hat{S}_{\hat{F}} := \frac{1}{4} \int d^6\hat{x}\sqrt{-\hat{g}}\; \hat{g}^{\hat{\mu}\hat{\nu}} \hat{g}^{\hat{\varrho}\hat{\sigma}} \hat{F}^I_{\hat{\mu}\hat{\varrho}} \hat{F}^J_{\hat{\nu}\hat{\sigma}} (M^{-1})_{IJ}, \tag{2.5.6}$$

wobei man gemäß (2.1.4) berücksichtigen muss, dass $\hat{F}^I_{\hat{\mu}\hat{\varrho}}$ neben der Ableitung des Feldes $\hat{A}^I_\mu$ auch das Zweiformfeld $\hat{B}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ beinhaltet. Für den Zweck, nur das Potential mit b^2 herleiten zu wollen, werden hier dementsprechend nicht alle Summanden von $\hat{F}^I_{\hat{\mu}\hat{\varrho}}$ betrachtet, sondern nur diejenigen mit dem Zweiformfeld $\hat{B}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$, so dass man nach Anwendung der ersten Weyl Reskalierung (2.3.2) erhält

$$\hat{S}_{\hat{B}} := \int d^6\hat{x}\sqrt{-\hat{g}}\; \hat{g}^{\hat{\mu}\hat{\nu}} \hat{g}^{\hat{\varrho}\hat{\sigma}} e^{\hat{\Phi}} \hat{B}_{\hat{\mu}\hat{\varrho}} \hat{B}_{\hat{\nu}\hat{\sigma}} m^I (M^{-1})_{IJ} m^J. \tag{2.5.7}$$

Nun kann man die Summe über die sechsdimensionalen Indizes wie in (2.3.11) aufspalten, wobei nur der Term

$$\hat{S}_b := \int d^6\hat{x}\sqrt{-\hat{g}}\ \hat{g}^{ac}\hat{g}^{bd}e^{\hat{\Phi}}b\epsilon_{ab}b\epsilon_{cd}m^I(M^{-1})_{IJ}m^J \tag{2.5.8}$$

von Interesse ist, da die anderen Summanden keine weiteren Anteile zum Potential liefern. Nun kann man $g^{ac} = h^{ac}$ (2.3.10) einsetzen (Auch hier wird nur dieser Summand betrachtet, da der andere Summand, also $2g^{\mu\nu}V_\mu^a V_\nu^b$ bereits eine vierdimensionale Metrik enthält und somit nicht zum Potential beitragen kann.), so dass man bekommt

$$\hat{S}_b = \int d^6\hat{x}\sqrt{-\hat{g}}\ e^{\hat{\Phi}}h^{ac}h^{bd}b^2\epsilon_{ab}\epsilon_{cd}m^I(M^{-1})_{IJ}m^J. \tag{2.5.9}$$

Weiterhin kann man die Determinante $\sqrt{-\hat{g}}$ gemäß (2.3.13) und die Integration wie in (2.3.15) aufteilen, so dass sich unter Berücksichtigung der Periodizität von T^2 (2.3.16) ergibt

$$S_b := \int d^4x\sqrt{-g}\sqrt{h}\ e^{\Phi}h^{ac}h^{bd}b^2\epsilon_{ab}\epsilon_{cd}m^I(M^{-1})_{IJ}m^J. \tag{2.5.10}$$

Dies ist bereits ein vierdimensionaler Wirkungsterm, wobei zusätzlich noch die Weyl Reskalierung für die vierdimensionale Metrik (2.3.21) sowie Definition (2.3.18) verwendet werden, um $\sqrt{h}$ zu entfernen. Nach diesen Schritten erhält man

$$S_b = \int d^4x\sqrt{-g}\ e^{\Phi+3\varphi}N^{ac}N^{bd}b^2\epsilon_{ab}\epsilon_{cd}m^I(M^{-1})_{IJ}m^J, \tag{2.5.11}$$

woraus sich nach Anwendung der Definitionen (2.4.17) und (2.4.18) schließlich das Potential von b^2 ergibt:

$$S_b = \int d^4x\sqrt{-g}\ e^{2\Lambda-\chi}N^{ac}N^{bd}b^2\epsilon_{ab}\epsilon_{cd}m^I(M^{-1})_{IJ}m^J. \tag{2.5.12}$$

Nachdem nun also beide Summanden des Potentials durch Reduktion der massiven Theorie hergeleitet worden sind, bekommt man eine Wirkung, die sich folgendermaßen zusammensetzt

$$S = S_{EH} + S_1 + S_2 + S_{top} + S_{ska} + S_{pot}, \tag{2.5.13}$$

welche sich nicht nur vom masselosen Fall dadurch unterscheidet, dass die Terme, die bereits dort auftreten, eine andere Gestalt besitzen, sondern auch dadurch, dass nun ein Potential gegeben ist, der sich in Kapitel 3.2 als sehr nützlich erweisen wird. Die einzelnen Teilwirkungen lauten insgesamt [14]

$$S_{EH} = -\frac{1}{4}\int d^4x\sqrt{-g}R(x), \tag{2.5.14}$$

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{4}\int d^4x\sqrt{-g}e^{\chi}[(F^I_{\mu\varrho} + \sqrt{2}V^a_{\mu\varrho}A^I_a) + 2m^I(B_{\mu\varrho} + \sqrt{2}V^a_{[\mu}C_{\varrho]a})] \\ &\times \ [(F^{\mu\varrho J} + \sqrt{2}V^{\mu\varrho b}A^J_b) + 2m^J(B^{\mu\varrho} + \sqrt{2}V^{[\mu b}C^{\varrho]}_b)] \\ &+ \ \frac{1}{8}\int d^4x\sqrt{-g}e^{\chi-\Lambda}N_{ab}V^a_{\mu\varrho}V^{\mu\varrho b} \\ &+ \ \frac{1}{4}\int d^4x\sqrt{-g}e^{-\chi-\Lambda}N^{ab}(C_{\mu\varrho a} - \sqrt{2}V^c_{\mu\varrho}b\epsilon_{ac})(C^{\mu\varrho}_b - \sqrt{2}V^{\mu\varrho d}b\epsilon_{bd}), \end{aligned} \tag{2.5.15}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{1}{12}\int d^4x\sqrt{-g}e^{-2\Lambda}(\partial_\mu B_{\varrho\kappa} - \frac{1}{\sqrt{2}}C_{\mu a}V^a_{\varrho\kappa} - \frac{1}{\sqrt{2}}C_{\varrho\kappa a}V^a_\mu + \text{z.P.}) \\ &\times \ (\partial^\mu B^{\varrho\kappa} - \frac{1}{\sqrt{2}}C^\mu_b V^{\varrho\kappa b} - \frac{1}{\sqrt{2}}C^{\varrho\kappa}_b V^{\mu b} + \text{z.P.}), \end{aligned} \tag{2.5.16}$$

$$\begin{aligned} S_{ska} &= \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}e^{\Lambda}N^{ab}(\partial_\mu A^I_a + 2m^I C_{\mu a})(\partial^\mu A^J_b + 2m^J C^\mu_b)(M^{-1})_{IJ} \\ &+ \ \int d^4x\sqrt{-g}\Big[+ \frac{1}{8}\partial_\mu\Lambda\partial^\mu\Lambda - \frac{1}{16}(\partial_\mu N_{ab})(\partial^\mu N^{ab}) \\ &+ \ \frac{1}{4}N^{ab}N^{cd}e^{-2\chi}(\partial_\mu b\epsilon_{ac})(\partial^\mu b\epsilon_{bd}) \\ &+ \ \frac{1}{8}\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi - \frac{1}{32}\partial_\mu(M^{-1})_{IJ}\partial^\mu M^{IJ}\Big], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{pot} &= \int d^4x\sqrt{-g}\Big[+ e^{2\Lambda-\chi}N^{ab}N^{cd}b^2\epsilon_{ac}\epsilon_{bd}m^I(M^{-1})_{IJ}m^J \\ &+ \ \frac{1}{2}e^{\chi+2\Lambda}m^I(M^{-1})_{IJ}m^J\Big] \end{aligned} \tag{2.5.17}$$

und

$$
\begin{aligned}
S_{top} &= \int d^4x\epsilon^{\varrho\sigma\mu\nu}\Big[\frac{1}{2}b\epsilon_{ab}\left(\frac{1}{2}F^I_{\varrho\sigma}+\sqrt{2}\partial_\varrho(V^c_\sigma A^I_c)\right)\left(\frac{1}{2}F^J_{\mu\nu}+\sqrt{2}\partial_\mu(V^d_\nu A^J_d)\right)\\
&+ \frac{1}{2}\partial_\mu\left(B_{\varrho\sigma}-\frac{1}{\sqrt{2}}V^c_\varrho C_{\sigma c}+\frac{1}{\sqrt{2}}V^d_\sigma C_{\varrho d}+2V^c_\varrho V^d_\sigma b\epsilon_{cd}\right)A^I_a\partial_\nu A^J_b\\
&- 2\left(C_{\varrho a}-\sqrt{2}V^b_\varrho b\epsilon_{ab}\right)\left(\frac{1}{2}F^I_{\sigma\mu}+\sqrt{2}\partial_\sigma(V^d_\mu A^I_d)\right)\partial_\nu A^J_b\Big]\epsilon^{ab}L_{IJ}\\
&+ \int d^4x\epsilon^{\varrho\sigma\mu\nu}\left(B_{\mu\nu}-\frac{1}{\sqrt{2}}V^c_\mu C_{\nu c}+\frac{1}{\sqrt{2}}V^d_\nu C_{\mu d}+2V^c_\mu V^d_\nu b\epsilon_{cd}\right)\\
&\times \Big[-2(C_{\varrho a}-\sqrt{2}V^c_\varrho b\epsilon_{ac})\partial_\sigma A^J_b\epsilon^{ab}m^I L_{IJ}\\
&+ 2b\left(\frac{1}{2}F^J_{\varrho\sigma}+\sqrt{2}\partial_\varrho(V^d_\sigma A^J_d)\right)m^I L_{IJ}\\
&- 2(C_{\varrho a}-\sqrt{2}V^c_\varrho b\epsilon_{ac})(C_{\sigma b}-\sqrt{2}V^d_\sigma b\epsilon_{bd})\epsilon^{ab}m^I L_{IJ}m^J\\
&+ b(B_{\varrho\sigma}-\frac{1}{\sqrt{2}}V^c_\varrho C_{\sigma c}+\frac{1}{\sqrt{2}}V^d_\sigma C_{\varrho d}+2V^c_\varrho V^d_\sigma b\epsilon_{cd})m^I L_{IJ}m^J\Big],
\end{aligned}
\tag{2.5.18}
$$

wobei in (2.5.17) kein kubischer Term in b auftreten kann, da bereits in (2.1.2) kein Term der Form $\hat{g}^{\hat{\mu}\hat{\varrho}}\hat{g}^{\hat{\nu}\hat{\sigma}}\hat{g}^{\hat{\kappa}\hat{\lambda}}\hat{B}_{\hat{\mu}\hat{\kappa}}\hat{B}_{\hat{\nu}\hat{\lambda}}\hat{B}_{\hat{\varrho}\hat{\sigma}}$ auftritt. Schaut man sich jedoch (2.5.18) an, so existiert dort ein Term, der b^3 enthält, wobei dieser von der kubischen Form von $\epsilon^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\varrho}\hat{\sigma}\hat{\kappa}\hat{\lambda}}\hat{B}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}\hat{B}_{\hat{\varrho}\hat{\sigma}}\hat{B}_{\hat{\kappa}\hat{\lambda}}$ resultiert. Dieser Term wird jedoch wegen des Auftretens von $\epsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}$ zum topologischen Term gezählt und nicht dem Potential zugerechnet.

Kapitel 3

Vergleich

In diesem Kapitel wird die reduzierte Wirkung, die in [14] berechnet worden ist, mit den Formeln aus [15] verglichen. Genauso wie die Reduktion selbst in einen masselosen und einen massiven Teil aufgeteilt worden ist, wird der Vergleich in diesen zwei Schritten durchgeführt. Vorher werden allerdings in den jeweiligen Fällen die allgemeine $\mathcal{N} = 4$ Theorie, die in [15] hergeleitet worden ist, vorgestellt.

3.1 Masseloser Fall

Bevor die Wirkung (2.4.6) - (2.4.10) mit dem Formalismus aus [15] verglichen werden kann, wird zunächst die Theorie für den masselosen Fall präsentiert. Nach der Betrachtung des masselosen Falles wird sich herausstellen, dass diese Theorie weder magnetische Vektoren noch Zweiformfelder enthält, wohingegen die reduzierte Wirkung (2.4.5) noch mit Hilfe dieser Felder ausgedrückt wird. Um die Wirkung (2.4.5) umzuschreiben, werden zunächst Dualisierungen durchgeführt: Im ersten Schritt wird der Zweiformterm zur Wirkung eines Skalars dualisiert, bevor im darauffolgenden Schritt die Wirkung eines Vektors zu der Wirkung eines anderen Vektors dualisiert wird. Dies ist notwendig, da man zwischen elektrischen und magnetischen Vektoren unterscheiden muss. Tatsächlich wird sich zeigen, dass das Feld $C_{\mu a}$, welches in (2.4.6) bis (2.4.10) auftritt, ein magnetischer Vektor ist, welcher nicht in der $\mathcal{N} = 4$ Theorie auftritt, so dass dessen Wirkung zu der Wirkung eines elektrischen Vektors dualisiert werden muss. Nach der Ausführung dieser Dualisierungen wird es möglich sein, die Felder, die in (2.4.5) auftreten, mit denen der $\mathcal{N} = 4$ Theorie zu vergleichen.

3.1.1 Masselose $\mathcal{N} = 4$ Supergravitation in vier Dimensionen

Die allgemeine $\mathcal{N} = 4$ Supergravitation in vier Dimensionen beinhaltet die Metrik, sechs masselose Vektoren und zwei reelle, masselose Skalare als Felder. Die entsprechende Theorie besitzt eine globale $SL(2)\times SO(6)$ Symmetrie [15, 20], die nur *on-shell* realisiert ist. Koppelt man diese Theorie an n Vektormultipletts, von denen jedes einen Vektor und sechs reele Skalare enthält, so bekommt man eine $\mathcal{N} = 4$ Supergravitation mit einer globalen *on-shell* Symmetriegruppe $G := SL(2) \times SO(6, n)$ [15, 21].

Damit kann man die Wirkung einer $\mathcal{N} = 4$ Supergravitation im masselosen Fall schreiben als

$$\begin{aligned} S_{kin} \quad := \quad & \int d^4x\sqrt{-g}\Big(\frac{1}{2}R + \frac{1}{16}\partial_\mu \mathcal{M}_{MN}\partial^\mu \mathcal{M}^{MN} - \frac{1}{4Im(\tau)^2}\partial_\mu\tau\partial^\mu\tau^* \\ - \quad & \frac{1}{4}Im(\tau)\mathcal{M}_{MN}H^{M+}_{\mu\nu}H^{\mu\nu N+}\Big) \\ + \quad & \frac{1}{8}\int d^4x \; Re(\tau)\epsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}\eta_{MN}H^{M+}_{\mu\nu}H^{N+}_{\varrho\sigma}, \end{aligned} \qquad (3.1.1)$$

wobei die Skalarfelder in zwei Restklassen der Form

$$\frac{SL(2)}{SO(2)} \times \frac{SO(6,n)}{SO(6)\times SO(n)} \qquad (3.1.2)$$

zerfallen. Die Restklasse $\frac{SL(2)}{SO(2)}$ auf der einen Seite kann durch einen Skalar $\tau \in \mathbb{C}$ mit $Im(\tau) > 0$ und konjugiert komplexen τ^* beschrieben werden, wohingegen $\frac{SO(6,n)}{SO(6)\times SO(n)}$ auf der anderen Seite durch Darstellungen $\mathcal{V}^a_M$ und $\mathcal{V}^m_M$ mit $a \in \{1, ..., n\}, m \in \{1, ..., 6\}$ und $M \in \{1, ..., 6 + n\}$ parametrisiert werden kann, wobei a und m $SO(n)$ und $SO(6)$ Vektorindizes sind und M als Multiindex verwendet wird.[6] Dabei wirken globale $SO(6, n)$ Transformationen von links auf die Matrix $\mathcal{V} = (\mathcal{V}^m_M, \mathcal{V}^a_M) \in SO(6, n)$, während lokale $SO(6) \times SO(n)$ Transformationen von rechts wirken:

$$\mathcal{V} \to g\mathcal{V}h(x), \;\; g \in SO(6, n), \;\; h(x) \in SO(6) \times SO(n). \qquad (3.1.3)$$

Mit Hilfe der Matrix $\mathcal{V}$ ist es möglich, eine Metrik η_{MN} in der folgenden Art und Weise zu definieren:

$$\eta_{MN} := -\mathcal{V}^m_M\mathcal{V}^m_N + \mathcal{V}^a_M\mathcal{V}^a_N, \qquad (3.1.4)$$

[6] Die Indizes M, N, P sollen nicht die gleichen Indizes sein wie I, J, K, L, wie sie in (2.1.4) definiert worden sind. Tatsächlich werden jene Indizes als Multiindizes verwendet, die I, J, K, L enthalten.

welche als $\eta_{MN} = \mathrm{diag}(-1,-1,-1,-1,-1,-1,+1,...,+1) \in SO(6,n)$ geschrieben werden kann. Außerdem kann man mit Hilfe der Darstellungen $\mathcal{V}_M^a$ und $\mathcal{V}_M^m$ die Matrix

$$\mathcal{M}_{MN} := \mathcal{V}_M^m \mathcal{V}_N^m + \mathcal{V}_M^a \mathcal{V}_N^a, \tag{3.1.5}$$

definieren, wobei ihre Inverse mit $\mathcal{M}^{MN}$ bezeichnet wird. Neben den Skalaren τ und $\mathcal{M}_{MN}$ taucht in der Wirkung (3.1.1) eine elektrische Feldstärke auf, die folgendermaßen definiert wird

$$H_{\mu\nu}^{M+} := \partial_{[\mu} H_{\nu]}^{M+}, \tag{3.1.6}$$

wobei H_ν^{M+} die elektrischen Felder bezeichnen.

Betrachtet man die Wirkung (3.1.1), so erkennt man, dass weder magnetische Vektoren noch Zweiformfelder auftreten. Dies kann man verstehen, wenn man bedenkt, dass die Wirkung magnetischer Vektoren dual zu der Wirkung elektrischer Vektoren sowie gleichsam die Wirkung von Zweiformen dual zu der von Skalaren ist.

3.1.2 Dualisierung der Wirkung eines Zweiformfeldes

In d Dimensionen besitzt eine p-Form $\binom{d-2}{p}$ physikalische Freiheitsgrade, so dass insbesondere in vier Dimensionen $\binom{2}{p}$ Freiheitsgrade beschrieben werden. Da $\binom{2}{2} = \binom{2}{0}$ gilt, folgt, dass die Beschreibung einer Wirkung einer Zweiform äquivalent zu der Beschreibung eines Skalars ist. Damit wird es möglich, die Wirkung der Zweiform in (2.4.5) durch die Wirkung eines Skalares auszudrücken [11].

Bevor die konkrete Problematik betrachtet wird, wird die Dualisierung einer Zweiformwirkung auf die Wirkung eines Skalars in allgemeiner Form durchgeführt. Die Lagrangedichte für die Wirkung einer Zweiform lautet

$$\mathcal{L}_2 = -\frac{f}{3!}(H_{\mu\nu\varrho} - F_{\mu\nu\varrho})(H^{\mu\nu\varrho} - F^{\mu\nu\varrho}) + \frac{1}{3!} H_{\mu\nu\varrho} J_\sigma \epsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}, \tag{3.1.7}$$

wobei f eine beliebige skalare Funktion, J_σ einen Vektor und $F_{\mu\nu\varrho}$ eine Dreiform bezeichnen, die nicht von der Zweiform $B_{\mu\nu}$ abhängen. Um (3.1.7) zu dualisieren, fügt man einen Lagrangschen Multiplikator hinzu, der ein Skalarfeld a enthält, wobei a das zu $B_{\mu\nu}$ dualisierte Skalarfeld genannt wird, so dass man erhält

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 = & - \frac{f}{3!}(H_{\mu\nu\varrho} - F_{\mu\nu\varrho})(H^{\mu\nu\varrho} - F^{\mu\nu\varrho}) \\ & + \frac{1}{3!} H_{\mu\nu\varrho} \left(J_\sigma + \partial_\sigma a\right) \epsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}. \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

Verwendet man die Euler-Lagrange Gleichungen für das Skalarfeld a, so impliziert dies, dass $H_{\mu\nu\varrho} = \partial_\mu B_{\nu\varrho} + \text{z.P.}$[7], wohingegen die Bewegungsgleichung für das Feld $H_{\mu\nu\varrho}$ wie folgt lautet

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial H_{\mu\nu\varrho}} \\ &= -\frac{2f}{3!} H^{\mu\nu\varrho} + \frac{2f}{3!} F^{\mu\nu\varrho} + \frac{1}{3!} \left(J_\sigma + \partial_\sigma a \right) \epsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}. \end{aligned} \tag{3.1.9}$$

Die Lösung dieser Gleichung lautet

$$H_{\mu\nu\varrho} = F_{\mu\nu\varrho} + \frac{1}{2f} \left(J_\sigma + \partial_\sigma a \right) \epsilon_{\mu\nu\varrho}{}^{\sigma}. \tag{3.1.10}$$

Setzt man diesen Term in (3.1.8) ein, erhält man einen Ausdruck, der nicht mehr von $H_{\mu\nu\varrho}$, sondern nur noch vom dualisierten Skalar a abhängt:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 &= -\frac{f}{3!} \left(\frac{1}{2f} \left(J_{\sigma_1} + \partial_{\sigma_1} a \right) \epsilon_{\mu\nu\varrho}{}^{\sigma_1} \right) \left(\frac{1}{2f} \left(J_{\sigma_2} + \partial_{\sigma_2} a \right) \epsilon^{\mu\nu\varrho\sigma_2} \right) \\ &+ \frac{1}{3!} \left(F_{\mu\nu\varrho} + \frac{1}{2f} \left(J_{\sigma_1} + \partial_{\sigma_1} a \right) \epsilon_{\mu\nu\varrho}{}^{\sigma_1} \right) \left(J_{\sigma_2} + \partial_{\sigma_2} a \right) \epsilon^{\mu\nu\varrho\sigma_2} \end{aligned} \tag{3.1.11}$$

Multipliziert man nun alle Terme aus und verwendet die Kontraktionsregeln für den ϵ - Tensor, bekommt man schließlich die Wirkung des skalaren Feldes a:

$$\mathcal{L}_{2,dual} = \frac{1}{3f} g^{\mu\nu} (J_\mu + \partial_\mu a)(J_\nu + \partial_\nu a) + \frac{1}{3!} F_{\mu\nu\varrho} (J_\sigma + \partial_\sigma a) \epsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}. \tag{3.1.12}$$

Nachdem die Dualisierung einer allgemeinen Zweiformwirkung durchgeführt worden ist, wird nun die konkrete Problematik betrachtet. Dazu werden alle Terme aus (2.4.6) - (2.4.10) gesammelt, die die Zweiform $B_{\mu\nu}$ enthalten, bevor diese Wirkung in die Form gebracht wird, in der (3.1.7) geschrieben steht. Für die gesamte Wirkung, die $B_{\mu\nu}$ enthält, bekommt man

$$\begin{aligned} S_B &:= \frac{1}{12} \int_{M_4} d^4x \sqrt{-g} e^{-2\Lambda} \left(\partial_\mu B_{\varrho\kappa} - \frac{1}{\sqrt{2}} C_{\mu a} V^a_{\varrho\kappa} - \frac{1}{\sqrt{2}} C_{\varrho\kappa a} V^a_\mu + \text{z.P.} \right) \\ &\times \left(\partial^\mu B^{\varrho\kappa} - \frac{1}{\sqrt{2}} C^{\mu b} V^b_{\varrho\kappa} - \frac{1}{\sqrt{2}} C^{\varrho\kappa b} V^b_\mu + \text{z.P.} \right) \\ &+ \frac{1}{3!} \int_{M_4} d^4x \epsilon^{\varrho\sigma\mu\nu} (\partial_\mu B_{\varrho\sigma} + \text{z.P.}) A^I_a \partial_\nu A^J_b \epsilon^{ab} L_{IJ}. \end{aligned} \tag{3.1.13}$$

[7]Nichtsdestoweniger wird in diesem Kontext das Feld $H_{\mu\nu\varrho}$ als unabhängiges Feld betrachtet.

Definiert man

$$F_{\mu\nu\kappa} := \frac{1}{\sqrt{2}} C_{\mu a} V^a_{\nu\kappa} + \frac{1}{\sqrt{2}} C_{\nu\kappa a} V^a_\mu + \text{ z.P.}, \tag{3.1.14}$$

$$f := -\frac{1}{2} e^{-2\Lambda}, \tag{3.1.15}$$

$$J_\nu := A^I_a \partial_\nu A^J_b \epsilon^{ab} L_{IJ} \tag{3.1.16}$$

und fügt hinzu, dass $H_{\mu\nu\varrho} = \partial_\mu B_{\nu\varrho} + \text{z.P.}$ kann man (3.1.13) in der Form (3.1.7) schreiben[8], so dass es einfach möglich ist, das Ergebnis (3.1.12) zu übernehmen. Setzt man die Definitionen (3.1.14) - (3.1.16) ein, so erhält man schließlich

$$\begin{aligned} S_{B,dual} = \frac{1}{6} \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\varrho\sigma} \Big(\frac{3}{\sqrt{2}} C_{\mu a} V^a_{\nu\varrho} + \frac{3}{\sqrt{2}} C_{\nu\varrho a} V^a_\mu \Big) \Big(A^I_a \partial_\sigma A^J_b \epsilon^{ab} L_{IJ} + \partial_\sigma a \Big) \\ -\frac{2}{3} \int d^4x \sqrt{-g} e^{2\Lambda} (A^I_a \partial_\mu A^J_b \epsilon^{ab} L_{IJ} + \partial_\mu a)(A^K_c \partial^\mu A^L_d \epsilon^{cd} L_{KL} + \partial^\mu a), \end{aligned} \tag{3.1.17}$$

wobei

$$\epsilon^{\mu\nu\varrho\sigma} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} C_{\mu a} V^a_{\nu\varrho} + \frac{1}{\sqrt{2}} C_{\nu\varrho a} V^a_\mu + \text{z.p.} \right] = \frac{3}{\sqrt{2}} C_{\mu a} V^a_{\nu\varrho} + \frac{3}{\sqrt{2}} C_{\nu\varrho a} V^a_\mu \tag{3.1.18}$$

wegen der Antisymmetrie von $\epsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}$ verwendet werden konnte.

3.1.3 Dualisierung der Wirkung eines Vektors

Nachdem nun die Wirkung der Zweiform dualisiert worden ist, lässt sich diese Prozedur auch auf Vektoren anwenden. Dies ist notwendig, da der angestrebte Vergleich der Wirkungen nicht mit Hilfe des Feldes $C_{\mu a}$ durchgeführt werden kann, was andeutet, dass $C_{\mu a}$ tatsächlich ein magnetischer Vektor ist. Da (3.1.1) jedoch keinen kinetischen Term für einen magnetischen Vektor enthält, wird zuerst die reduzierte Theorie (2.4.5) in der Hinsicht dualisiert, dass der magnetische Vektor verschwindet und dafür durch einen elektrischen Vektor ersetzt wird. Dies ist prinzipiell möglich, da elektrische und magnetische Vektoren die gleiche Anzahl an Freiheitsgraden besitzen. Wie in Kapitel 3.1.2 wird die Dualisierung für den allgemeinen Fall durchgeführt, bevor

[8] Hierbei ist zu erwähnen, dass innerhalb dieser Rechnung die Felder $B_{\mu\nu}$ und $H_{\mu\nu\varrho}$ als unabhängig voneinander betrachtet werden. Die Beziehung, dass H als Ableitung von B geschrieben werden kann, wird durch den Lagrangschen Multiplikator a sichergestellt.

das konkrete Problem bemüht wird.

Die Lagrangedichte für einen magnetischen Vektor lautet im Allgemeinen

$$\mathcal{L}_1 = -\frac{f}{2}N^{ab}(C_{\mu\nu a} - J_{\mu\nu a})(C_b^{\mu\nu} - J_b^{\mu\nu}) - \frac{1}{4}C_{\mu\nu a}K^a_{\varrho\sigma}\epsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}, \qquad (3.1.19)$$

wobei f eine beliebige Funktion sowie $J_{\mu\nu a}$ und $K^a_{\mu\nu}$ beliebige Zweiformfelder sind, die den magnetischen Vektor $C_{\mu a}$ nicht enthalten.

Wie zuvor lässt sich ein Lagrangscher Multiplikator hinzufügen; allerdings besitzt er dieses Mal die Form $-\frac{1}{4}C_{\mu\nu a}D^a_{\varrho\sigma}\epsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}$, wobei $D^a_{\mu\nu} := \partial_\mu D^a_\nu - \partial_\nu D^a_\mu$ die Feldstärke eines elektrischen Vektors D^a_μ bezeichne, welcher als dualer Vektor zum magnetischen Vektor C^a_μ diene. Damit erhält man

$$\mathcal{L}_1 = - \frac{f}{2}N^{ab}(C_{\mu\nu a} - J_{\mu\nu a})(C_b^{\mu\nu} - J_b^{\mu\nu}) - \frac{1}{4}C_{\mu\nu a}\left(K^a_{\varrho\sigma} + D^a_{\varrho\sigma}\right)\epsilon^{\mu\nu\varrho\sigma} \qquad (3.1.20)$$

Nun kann man die Bewegungsgleichung für $C_{\mu\nu a}$ ausnutzen, um von der Darstellung durch $C_{\mu a}$ zu der Darstellung mit Hilfe von D^a_μ zu gelangen. Da $\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial(\partial_\varrho C_{\mu\nu a})} \equiv 0$ ist, reduziert sich die Euler-Lagrange Gleichung zu

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial C_{\mu\nu a}} \\ &= -fN^{ab}C_b^{\mu\nu} + fN^{ab}J_b^{\mu\nu} - \frac{1}{4}\left(K^a_{\varrho\sigma} + D^a_{\varrho\sigma}\right)\epsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}, \end{aligned} \qquad (3.1.21)$$

wobei N^{ab} gemäß (2.4.19) ersetzt werden kann, so dass die Metrik h^{ab} des Torus in dieser Gleichung auftritt. Damit wird (3.1.21) zu

$$0 = -fh^{ab}e^{\frac{1}{2}(\chi-\Lambda)}C_b^{\mu\nu} + fh^{ab}e^{\frac{1}{2}(\chi-\Lambda)}J_b^{\mu\nu} - \frac{1}{4}\left(K^a_{\varrho\sigma} + D^a_{\varrho\sigma}\right)\epsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}, \qquad (3.1.22)$$

dessen Lösung ist:

$$C_{\mu\nu a} = J_{\mu\nu a} - \frac{e^{\frac{1}{2}(\Lambda-\chi)}}{4f}\left(K_{\varrho\sigma a} + D_{\varrho\sigma a}\right)\epsilon_{\mu\nu}{}^{\varrho\sigma}. \qquad (3.1.23)$$

Ersetzt man nun $C_{\mu\nu a}$ in (3.1.20) durch diese Lösung, erhält man

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{1,dual} = &- \frac{1}{8f}N^{ab}e^{\Lambda-\chi}(K_{\mu\varrho a} + D_{\mu\varrho a})(K_b^{\mu\varrho} + D_b^{\mu\varrho}) \\ &- \frac{1}{4}J_{\mu\nu a}(K^a_{\varrho\sigma} + D^a_{\varrho\sigma})\epsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}. \end{aligned} \qquad (3.1.24)$$

Um später die reduzierte Wirkung mit dem Ergebnis der Dualisierung vergleichen zu können, werden zusätzlich die Indizes a und b im kinetischen Term hochgesetzt. Zu diesem Zweck wird die Metrik h_{ab} des Torus T^2 verwendet, so dass (3.1.24) zu

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{1,dual} = & - \frac{1}{8f} N^{ab} e^{\Lambda-\chi} h_{ac} (K^c_{\mu\varrho} + D^c_{\mu\varrho}) h_{bd} (K^{\mu\varrho d} + D^{\mu\varrho d}) \\ & - \frac{1}{4} J_{\mu\nu a} (K^a_{\varrho\sigma} + D^a_{\varrho\sigma}) \epsilon^{\mu\nu\varrho\sigma} \end{aligned} \tag{3.1.25}$$

wird.

Dieser Ausdruck kann vereinfacht werden, indem man die Relation zwischen h_{ab} und N^{ab} ausnutzt. Verwendet man (2.4.19), so bekommt man

$$N^{ab} e^{\Lambda-\chi} h_{ac} h_{bd} = e^{\frac{1}{2}(\Lambda-\chi)} h_{cd} = N_{cd}. \tag{3.1.26}$$

Mit Hilfe dieser Beziehung erhält man schließlich die Lagrangedichte für den dualen Vektor

$$\mathcal{L}_{1,dual} = -\frac{1}{8f} N_{ab} (K^a_{\mu\varrho} + D^a_{\mu\varrho})(K^{\mu\varrho b} + D^{\mu\varrho b}) - \frac{1}{4} J_{\mu\nu a} (K^a_{\varrho\sigma} + D^a_{\varrho\sigma}) \epsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}. \tag{3.1.27}$$

Jetzt kann man, wie es schon bei der Zweiform der Fall war, alle Terme in (2.4.5) sammeln, die den Vektor $C_{\mu a}$ enthalten. Mit Hilfe von (2.4.7), (2.4.8) und (3.1.17) erhält man die gesamte Wirkung von $C_{\mu a}$:

$$\begin{aligned} S_C \; := & \; \frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-g} e^{-\chi-\Lambda} N^{ab} (C_{\mu\varrho a} - \sqrt{2} V^c_{\mu\varrho} b \epsilon_{ac})(C^{\mu\varrho}_b - \sqrt{2} V^{\mu\varrho d} b \epsilon_{bd}) \\ + & \; \frac{1}{2} \int d^4x \epsilon^{\varrho\sigma\mu\nu} \partial_\mu \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} V^a_\varrho C_{\sigma a} + \frac{1}{\sqrt{2}} V^a_\sigma C_{\varrho a} \right) A^I_a \partial_\nu A^J_b \epsilon^{ab} L_{IJ} \\ - & \; 2 \int d^4x \epsilon^{\varrho\sigma\mu\nu} C_{\varrho a} \left(\frac{1}{2} F^I_{\sigma\mu} + \sqrt{2} \partial_\sigma (V^c_\mu A^I_c) \right) \partial_\nu A^J_b \epsilon^{ab} L_{IJ} \\ + & \; \frac{1}{6} \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\varrho\sigma} \left(\frac{3}{\sqrt{2}} C_{\mu a} V^a_{\nu\varrho} + \frac{3}{\sqrt{2}} C_{\nu\varrho a} V^a_\mu \right) (A^I_a \partial_\sigma A^J_b \epsilon^{ab} L_{IJ} + \partial_\sigma a). \end{aligned} \tag{3.1.28}$$

Während der kinetische Term in der Form bleibt, wie er vorgegeben ist, werden im topologischen Anteil noch einige Rechenschritte durchgeführt, um das Verfahren der Dualisierung zu verwenden, wie es oben im Allgemeinen beschrieben wurde. Als erstes nutzt man die Antisymmetrie des Levi-Civita Tensors, um im zweiten und dritten Integral partiell zu integrieren und dort

Koordinaten zu vertauschen (unter dem Wechsel eines Vorzeichens). Damit bekommt man

$$\begin{aligned}
S_C &= \frac{1}{4}\int d^4x\sqrt{-g}e^{-\chi-\Lambda}N^{ab}(C_{\mu\varrho a}-\sqrt{2}V^c_{\mu\varrho}b\epsilon_{ac})(C_b^{\mu\varrho}-\sqrt{2}V_{\mu\varrho d}b\epsilon_{bd})\\
&+ \frac{1}{2\sqrt{2}}\int d^4x\epsilon^{\varrho\sigma\mu\nu}V^a_\varrho C_{\sigma a}\partial_\mu A^I_c\partial_\nu A^J_b\epsilon^{cb}L_{IJ}\\
&+ 2\int d^4x\epsilon^{\varrho\sigma\mu\nu}\partial_\nu C_{\varrho a}\left(\frac{1}{2}F^I_{\sigma\mu}+\sqrt{2}\partial_\sigma(V^c_\mu A^I_c)\right)A^J_b\epsilon^{ab}L_{IJ}\\
&+ \frac{1}{2\sqrt{2}}\int d^4x\epsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}(C_{\mu a}V^a_{\nu\varrho}+C_{\nu\varrho a}V^a_\mu)(A^I_c\partial_\sigma A^J_b\epsilon^{cb}L_{IJ}+\partial_\sigma a).
\end{aligned} \tag{3.1.29}$$

Das zweite Integral, das $V^a_\varrho C_{\sigma a}\partial_\mu A^I_a\partial_\nu A^J_b\epsilon^{ab}L_{IJ}$ enthält, kürzt sich gerade mit einem Teil des letzten Integrals. Überdies kann $\partial_\nu C_{\varrho a}$ gemäß (2.4.12) als Feldstärke geschrieben werden (unter Hinzunahme eines Faktors $\frac{1}{2}$), so dass (3.1.29) folgende Form annimmt:

$$\begin{aligned}
S_C &= \frac{1}{4}\int d^4x\sqrt{-g}e^{-\chi-\Lambda}N^{ab}(C_{\mu\varrho a}-\sqrt{2}V^c_{\mu\varrho}b\epsilon_{ac})(C_b^{\mu\varrho}-\sqrt{2}V^{\mu\varrho d}b\epsilon_{bd})\\
&+ \frac{1}{\sqrt{2}}\int d^4x\epsilon^{\varrho\sigma\mu\nu}V^a_\varrho C_{\sigma a}\partial_\mu A^I_c\partial_\nu A^J_b\epsilon^{cb}L_{IJ}\\
&+ \int d^4x\epsilon^{\varrho\sigma\mu\nu}C_{\nu\varrho a}\left(\frac{1}{2}F^I_{\sigma\mu}+\sqrt{2}\partial_\sigma(V^c_\mu A^I_c)\right)A^J_b\epsilon^{ab}L_{IJ}\\
&+ \frac{1}{2\sqrt{2}}\int d^4x\epsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}C_{\nu\varrho c}V^c_\mu\partial_\sigma a.
\end{aligned} \tag{3.1.30}$$

Es bleibt immer noch ein wenig Rechenarbeit übrig, um diese Wirkung in der Form von (3.1.19) zu schreiben, insbesondere da das dort verwendete $K^a_{\mu\nu}$ antisymmetrisch in μ und ν ist. Durch partielle Integration im letzten Integral und Anwendung der Produktregel der Differentiation auf $\partial_\sigma(V^c_\mu A^I_c)$

wird die Wirkung (3.1.30) zu

$$\begin{aligned}
S_C &= \frac{1}{4}\int d^4x\sqrt{-g}e^{-\chi-\Lambda}N^{ab}(C_{\mu\varrho a}-\sqrt{2}V^c_{\mu\varrho}b\epsilon_{ac})(C_b^{\mu\varrho}-\sqrt{2}V^{\mu\varrho d}b\epsilon_{bd}) \\
&+ \frac{1}{\sqrt{2}}\int d^4x\epsilon^{\varrho\sigma\mu\nu}V^a_\varrho C_{\sigma a}\partial_\mu A^I_c\partial_\nu A^J_b\epsilon^{cb}L_{IJ} \\
&+ \int d^4x\epsilon^{\varrho\sigma\mu\nu}C_{\nu\varrho a}\left(\frac{1}{2}F^I_{\sigma\mu}+\frac{1}{\sqrt{2}}V^c_{\sigma\mu}A^I_c+\sqrt{2}V^c_\mu\partial_\sigma A^I_c\right)A^J_b\epsilon^{ab}L_{IJ} \\
&- \frac{1}{2\sqrt{2}}\int d^4x\epsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}C_{\nu\varrho c}V^c_{\sigma\mu}a.
\end{aligned} \tag{3.1.31}$$

Das zweite Integral kürzt sich nach partieller Integration mit dem letzten Summanden des dritten Integrals, so dass die gesamte Wirkung geschrieben werden kann als

$$\begin{aligned}
S_C &= \frac{1}{4}\int d^4x\sqrt{-g}e^{-\chi-\Lambda}N^{ab}(C_{\mu\varrho a}-\sqrt{2}V^c_{\mu\varrho}b\epsilon_{ac})(C_b^{\mu\varrho}-\sqrt{2}V^{\mu\varrho d}b\epsilon_{bd}) \\
&+ \int d^4x\epsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}C_{\nu\varrho c}\left(\frac{1}{2}F^I_{\sigma\mu}A^J_b\epsilon^{cb}L_{IJ}+\frac{\sqrt{2}}{4}V^d_{\sigma\mu}A^I_dA^J_b\epsilon^{cb}L_{IJ}-\frac{\sqrt{2}}{4}V^c_{\sigma\mu}a\right).
\end{aligned} \tag{3.1.32}$$

Definiert man nun

$$J_{\mu\varrho a} := \sqrt{2}V^c_{\mu\varrho}(b\epsilon_{ac}), \tag{3.1.33}$$

$$f := -\frac{1}{2}e^{-\chi-\Lambda}, \tag{3.1.34}$$

$$K^c_{\mu\sigma} := -2F^I_{\sigma\mu}A^J_b\epsilon_{cb}L_{IJ}-\sqrt{2}V^d_{\sigma\mu}A^I_dA^J_b\epsilon^{cb}L_{IJ}+\sqrt{2}V^c_{\sigma\mu}a \tag{3.1.35}$$

kann man die Wirkung, die man in (3.1.32) erhalten hat, in der Form (3.1.19) schreiben, so dass das Verfahren der Dualisierung, welches in (3.1.27) resultierte, angewendet werden kann. Damit lässt sich die Wirkung des dualen Vektors schreiben als

$$\begin{aligned}
S_{C,dual} &= \frac{1}{4}\int d^4x\sqrt{-g}\; N_{ab}e^{\chi+\Lambda}\Big(-2F^I_{\varrho\mu}A^J_c\epsilon^{ac}L_{IJ}-\sqrt{2}V^d_{\varrho\mu}A^I_dA^J_c\epsilon^{ac}L_{IJ} \\
&+ \sqrt{2}V^a_{\varrho\mu}a+D^a_{\mu\varrho}\Big)\Big(-2F^{\varrho\mu J}A^J_e\epsilon^{be}L_{IJ}-\sqrt{2}V_{\varrho\mu f}A^I_fA^J_e\epsilon^{be}L_{IJ} \\
&+ \sqrt{2}V_{\varrho\mu b}a+D_{\mu\varrho b}\Big) \\
&- \frac{\sqrt{2}}{4}\int d^4x\; \epsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}V^c_{\mu\nu}b\epsilon_{ac}\Big(-2F^J_{\sigma\varrho}A^J_b\epsilon^{ab}L_{IJ} \\
&- \sqrt{2}V^d_{\sigma\varrho}A^I_dA^J_b\epsilon^{ab}L_{IJ}+\sqrt{2}V^a_{\sigma\varrho}a+D^a_{\varrho\sigma}\Big).
\end{aligned} \tag{3.1.36}$$

Nachdem nun die Zweiform $B_{\mu\nu}$ zu einem Skalar a und der magnetische Vektor $C_{\mu a}$ zu einem elektrischen Vektor D^a_μ dualisiert worden sind, kann man wieder alle Felder zählen und erhält:

1. 134 Skalare: χ (1), Λ (1), N_{ab} (2), A^I_a (48), $b\epsilon_{ab}$, (1), $(M^{-1})_{IJ}$ (80), a (1)

2. 28 Vektorfelder: F^I_μ (24), D^a_μ (2), V^a_μ (2)

Damit erhält man tatsächlich die gewünschte Anzahl an Freiheitsgraden: 134 Skalare und 28 Vektorfelder, genauso wie es für eine $\mathcal{N}=4$ Supergravitation mit einem $n=22$ Vektormultiplett sein sollte.

3.1.4 Vergleich

Nachdem nun $B_{\mu\nu}$ zu einem Skalar a sowie $C_{\mu a}$ zum elektrischen Vektor D^a_μ dualisiert worden sind, nimmt der topologische Term unter Verwendung von (3.1.36) und (2.4.8) die folgende Form an

$$\begin{aligned} S_{top,dual} &= \int d^4x\epsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}\Big[\Big(\frac{1}{2}b\epsilon_{ab}\Big(\frac{1}{2}F^I_{\varrho\sigma}+\sqrt{2}\partial_\varrho(V^c_\sigma A^I_c)\Big) \\ &\times \Big(\frac{1}{2}F^J_{\mu\nu}+\sqrt{2}(V^d_\nu A^J_d)\Big) - V^c_\varrho V^d_\sigma b\epsilon_{cd}\partial_\mu A^I_a\partial_\nu A^J_b \\ &+ 2\sqrt{2}V^c_\varrho b\epsilon_{ac}\Big(\frac{1}{2}F^I_{\sigma\mu}+\sqrt{2}(V^c_\mu A^I_c)\Big)\partial_\nu A^J_b\Big)\epsilon^{ab}L_{IJ} \\ &- \frac{\sqrt{2}}{4}V^c_{\mu\nu}b\epsilon_{ac}\Big(D^a_{\varrho\sigma}-2F^I_{\sigma\varrho}A^J_b\epsilon^{ab}L_{IJ}-\sqrt{2}V^d_{\sigma\varrho}A^I_dA^J_b\epsilon^{ab}L_{IJ} \\ &+ \sqrt{2}V^a_{\sigma\varrho}a\Big)\Big]. \end{aligned} \tag{3.1.37}$$

Unter Verwendung der Antisymmetrie des Levi-Civita Tensors, des Distributivgesetzes und der Produktregel der Differentiation lässt sich der komplette topologische Term schreiben als

$$\begin{aligned} S_{top,dual} &= \int d^4x\Big(\frac{1}{4}bF^I_{\varrho\sigma}F^J_{\mu\nu}L_{IJ}+2bV^c_\sigma V^d_\nu\partial_\varrho A^I_c\partial_\mu A^J_dL_{IJ} \\ &- 2bV^c_\varrho V^d_\sigma\partial_\mu A^I_c\partial_\nu A^J_dL_{IJ}+2b\partial_\varrho V^c_\sigma\partial_\mu V^d_\nu A^I_cA^J_dL_{IJ} \\ &+ \sqrt{2}bF^I_{\varrho\sigma}\partial_\mu V^d_\nu A^J_dL_{IJ}+\sqrt{2}bF^I_{\varrho\sigma}V^d_\nu\partial_\mu A^J_dL_{IJ} \\ &+ 4b\partial_\varrho V^c_\sigma\partial_\mu A^J_dA^I_cV^d_\nu L_{IJ}+\sqrt{2}V^c_\varrho b\epsilon_{ac}F^I_{\sigma\mu}\partial_\nu A^J_b\epsilon^{ab}L_{IJ} \\ &+ 4V^c_\varrho b\epsilon_{ac}\partial_\sigma V^d_\mu A^I_d\partial_\nu A^J_b\epsilon^{ab}L_{IJ}+4V^c_\varrho b\epsilon_{ac}V^d_\mu\partial_\sigma A^I_d\partial_\nu A^J_b\epsilon^{ab}L_{IJ} \\ &- \frac{\sqrt{2}}{4}V^c_{\mu\nu}b\epsilon_{ac}D^a_{\varrho\sigma}+\frac{\sqrt{2}}{2}V^c_{\mu\nu}b\epsilon_{ac}F^I_{\sigma\varrho}A^J_b\epsilon^{ab}L_{IJ} \\ &+ \frac{1}{2}V^c_{\mu\nu}b\epsilon_{ac}V^d_{\sigma\varrho}A^I_dA^J_b\epsilon^{ab}L_{IJ}-\frac{1}{2}V^c_{\mu\nu}b\epsilon_{ac}V^a_{\sigma\varrho}a\Big)\epsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}. \end{aligned} \tag{3.1.38}$$

Die meisten Terme in dieser Wirkung kürzen sich auf Grund der Kontraktionsregeln gegeneinander weg, so dass der topologische Term eine einfachere Form annimmt:

$$S_{top,dual} = \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\varrho\sigma} \Big(\frac{1}{4} b F^I_{\varrho\sigma} F^J_{\mu\nu} L_{IJ} - \frac{\sqrt{2}}{4} V^c_{\mu\nu} b \epsilon_{ac} D^a_{\varrho\sigma} - \frac{1}{2} V^c_{\mu\nu} b \epsilon_{ac} V^a_{\sigma\varrho} a \Big). \tag{3.1.39}$$

Der letzte Summand verschwindet ebenfalls, da $\epsilon^{\mu\nu\varrho\sigma} V^c_{\mu\nu} b \epsilon_{ac} V^a_{\sigma\varrho} a$ beim Austauschen von μ und σ sowie ν und ϱ zwar symmetrisch, aber antisymmetrisch in a und c ist. Weiterhin ist es notwendig, das Feld D^a_μ (oder äquivalenterweise die Feldstärke $D^a_{\mu\nu}$) in der folgenden Art und Weise zu reskalieren:

$$D^a_{\mu\nu} \to \sqrt{2} D^a_{\mu\nu}, \tag{3.1.40}$$

so dass man nur noch erhält

$$\begin{aligned} S_{top,dual} &= \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\varrho\sigma} \left(\frac{1}{4} b F^I_{\varrho\sigma} F^J_{\mu\nu} L_{IJ} - \frac{1}{2} V^c_{\mu\nu} b \epsilon_{ac} D^a_{\varrho\sigma} \right) && (3.1.41) \\ &= -\frac{1}{16} \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\varrho\sigma} (-4b) \left(F^I_{\mu\nu} F^J_{\varrho\sigma} L_{IJ} - V^c_{\mu\nu} \epsilon_{bc} D^b_{\varrho\sigma} - V^d_{\mu\nu} \epsilon_{ad} D^a_{\varrho\sigma} \right), && (3.1.42) \end{aligned}$$

wobei der Term $V^c_{\mu\nu} \epsilon_{ac} D^a_{\varrho\sigma}$ in c und a symmetrisiert worden ist, da die beiden Feldstärken $V^c_{\mu\nu}$ und $D^a_{\varrho\sigma}$ einen T^2 - Index besitzen, diese allerdings später für $V^c_{\mu\nu}$ und $D^a_{\varrho\sigma}$ separat betrachtet werden.

Definiert man

$$Re(\tau) := -4b, \tag{3.1.43}$$

die Feldstärke

$$H^{M+}_{\mu\nu} := \begin{pmatrix} F^I_{\mu\nu} \\ D^a_{\mu\nu} \\ V^{\bar{c}}_{\mu\nu} \end{pmatrix} \tag{3.1.44}$$

mit $M := (I, a, \bar{c}), I = 1, ..., 24,\ a = 4, 5,\ \bar{c} = 4, 5$[9] als Multiindex und die $SO(6, 22)$ Metrik

$$\eta_{MN} := \begin{pmatrix} L_{IJ} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\epsilon_{a\bar{d}} \\ 0 & \epsilon_{\bar{c}b} & 0 \end{pmatrix} \tag{3.1.45}$$

[9] Um zwischen den Indizes von $D^a_{\mu\nu}$ und $V^c_{\mu\nu}$, die beide 4 oder 5 sein können, zu unterscheiden, wird der Index von $V^c_{\mu\nu}$ innerhalb des Multiindex M als $\bar{c}$ bezeichnet, so dass also $V^{\bar{c}}_{\mu\nu}$ anstatt $V^c_{\mu\nu}$ geschrieben wird.

mit einem zusätzlichen Multiindex $N := (J, b, \bar{d})$, kann man den topologischen Term schreiben als[10]

$$S_{top,dual} = -\frac{1}{16} \int d^4x Re(\tau) \eta_{MN} \epsilon^{\mu\nu\varrho\sigma} H^{M+}_{\mu\nu} H^{N+}_{\varrho\sigma}. \tag{3.1.46}$$

Der Leser, der daran interessiert ist, zu sehen, dass η_{MN} tatsächlich eine $SO(6, 22)$ Metrik ist, wird auf Anhang B verwiesen. Die Inverse von η_{MN} ist gegeben durch

$$\eta^{MN} = \begin{pmatrix} L^{IJ} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon^{a\bar{d}} \\ 0 & -\epsilon^{\bar{c}b} & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.1.47}$$

Da man nun einen Ausdruck für $Re(\tau)$ gewonnen hat, kann man den skalaren Term (2.4.9) betrachten, um $Im(\tau)$ zu bestimmen. Nach der Bestimmung von τ wird es schließlich möglich sein, einen Ausdruck für die Matrix $\mathcal{M}_{MN}$ zu bekommen und somit den Vergleich für den masselosen Fall abzuschließen.

Um nun $Im(\tau)$ bestimmen zu können, werden der kinetische Term für $\mathbb{C} \ni \tau = Re(\tau) + iIm(\tau)$, der in (3.1.1) auftritt, sowie der Wirkungsterm für b, welcher in (2.4.9) vorkommt, gleichgesetzt. Betrachtet man nur den Realteil von τ, erhält man

$$\frac{1}{8} \frac{1}{Im(\tau)^2} \partial_\mu Re(\tau) \partial^\mu Re(\tau) = \frac{1}{4} e^{-2\chi} N^{ab} N^{cd} \partial_\mu (b\epsilon_{ac}) \partial^\mu (b\epsilon_{bd}). \tag{3.1.48}$$

Verwendet man $Re(\tau) = -4b$ und $\epsilon_{ac}\epsilon_{bd} N^{ab} N^{cd} = 2 \det N = 2$, bekommt man

$$\frac{1}{8} \frac{1}{Im(\tau)^2} = \frac{1}{32} e^{-2\chi}, \tag{3.1.49}$$

dessen Lösung sich ergibt zu

$$Im(\tau) = 2e^{\chi}, \tag{3.1.50}$$

wobei das positive Vorzeichen von $\sqrt{4e^{2\chi}}$ gewählt wurde, da der Imaginärteil von τ positiv ist.

Fügt man (3.1.43) und (3.1.50) zusammen, bekommt man zwei der 134 Skalare, die den komplexen Skalar τ parametrisieren

$$\tau = \tau(b, \chi) = -4b + i2e^{\chi}. \tag{3.1.51}$$

[10] Hier und im weiteren Abschnitt wird nicht (3.1.1) direkt, sondern die mit $-\frac{1}{2}$ multiplizierte Wirkung betrachtet. Diese Reskalierung ist notwendig, da in (3.1.1) der Einstein-Hilbert Term einen Vorfaktor $\frac{1}{2}$ besitzt, während in (2.4.6) der Faktor $-\frac{1}{4}$ auftritt. Möglich ist dies immer, da die Euler-Lagrange Gleichung invariant ist unter $\mathcal{L} \to c\mathcal{L}, c \in \mathbb{R}$.

Um abschließend einen Ausdruck für die Matrix $\mathcal{M}$, in der die anderen 132 von insgesamt 134 Skalare stehen, zu erhalten, werden alle kinetischen Terme betrachtet, die die Vektorfelder enthalten. Insgesamt wird damit also (2.4.7) betrachtet, allerdings ohne den Term für $C_{\mu a}$, der stattdessen durch den kinetischen Term des dualen Vektors D_μ^a (3.1.36) ersetzt wird, so dass sich ergibt

$$\begin{aligned}
S_{1,dual} &= \int d^4x\sqrt{-g}\Big[\frac{1}{8}e^{\chi-\Lambda}N_{ab}V^a_{\mu\varrho}V^{\mu\varrho b} + \frac{1}{4}e^{\chi+\Lambda}N_{ab}(2F^I_{\mu\varrho}A^J_c\epsilon^{ac}L_{IJ} \\
&+ \sqrt{2}V^d_{\mu\varrho}A^I_dA^J_c\epsilon^{ac}L_{IJ} - \sqrt{2}V^a_{\mu\varrho}a + \sqrt{2}D^a_{\mu\varrho}) \\
&\times (2F^{\mu\varrho I}A^J_d\epsilon^{bd}L_{IJ} + \sqrt{2}V^{\mu\varrho d}A^I_dA^J_e\epsilon^{be}L_{IJ} - \sqrt{2}V^{\mu\varrho b}a + \sqrt{2}D^{\mu\varrho b}) \\
&+ \frac{1}{4}e^{\chi}(F^I_{\mu\varrho} + \sqrt{2}V^c_{\mu\varrho}A^I_c)(F^{\mu\varrho J} + \sqrt{2}V^{\mu\varrho d}A^J_d)(M^{-1})_{IJ}\Big]. \qquad (3.1.52)
\end{aligned}$$

Zieht man in diesem Ausdruck den Skalar $Im(\tau)$ (3.1.50) sowie einen konstanten Faktor $\frac{1}{8}$ heraus, so lässt sich eine symmetrische Matrix $\mathcal{M}_{MN}$ definieren

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{IJ} &:= 4e^{\Lambda}N_{ab}A^K_{\bar{c}}A^L_{\bar{d}}\epsilon^{a\bar{c}}\epsilon^{b\bar{d}}L_{IK}L_{LJ} + (M^{-1})_{IJ}, && (3.1.53)\\
\mathcal{M}_{ab} &:= +2e^{\Lambda}N_{ab}, && (3.1.54)\\
\mathcal{M}_{Ib} &:= +2\sqrt{2}\ e^{\Lambda}N_{ab}A^J_{\bar{c}}\epsilon^{a\bar{c}}L_{IJ}, && (3.1.55)\\
\mathcal{M}_{a\bar{d}} &:= 2\ e^{\Lambda}N_{ab}A^I_{\bar{d}}A^J_{\bar{c}}\epsilon^{b\bar{c}}L_{IJ} - 2\ e^{\Lambda}N_{a\bar{d}}a, && (3.1.56)\\
\mathcal{M}_{I\bar{d}} &:= \sqrt{2}A^J_{\bar{d}}(M^{-1})_{IJ} + 2\sqrt{2}\ e^{\Lambda}N_{ab}A^J_{\bar{c}}A^K_{\bar{d}}A^L_e\epsilon^{a\bar{c}}\epsilon^{be}L_{IJ}L_{KL} \\
&- 2\sqrt{2}\ e^{\Lambda}N_{a\bar{d}}A^J_{\bar{c}}a\epsilon^{a\bar{c}}L_{IJ}, && (3.1.57)\\
\mathcal{M}_{\bar{c}\bar{d}} &:= \frac{1}{2}e^{-\Lambda}N_{\bar{c}\bar{d}} + 2\ A^I_{\bar{c}}A^J_{\bar{d}}(M^{-1})_{IJ} + 2\ e^{\Lambda}N_{\bar{c}\bar{d}}a^2 && (3.1.58)\\
&+ 2\ e^{\Lambda}N_{ab}A^I_{\bar{c}}A^K_{\bar{d}}A^K_eA^L_f\epsilon^{ae}\epsilon^{bf}L_{IJ}L_{KL} \\
&- 2\ e^{\Lambda}N_{a\bar{d}}A^I_{\bar{c}}A^J_e a\epsilon^{ae}L_{IJ} - 2\ e^{\Lambda}N_{\bar{c}b}A^I_{\bar{d}}A^J_f a\epsilon^{bf}L_{IJ},
\end{aligned}$$

wobei die Inverse mit Hilfe der Gleichung $\mathcal{M}^{MN} = \mathcal{M}_{OP}\eta^{OM}\eta^{PN}$ berechnet werden kann. Die explizite Ausführung liefert

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}^{IJ} &= 4e^{\Lambda}N_{ab}A^I_{\bar{c}}A^J_{\bar{d}}\epsilon^{a\bar{c}}\epsilon^{b\bar{d}} + (M^{-1})^{IJ}, && (3.1.59)\\
\mathcal{M}^{I\bar{d}} &= 2\sqrt{2}e^{\Lambda}N_{ab}A^I_{\bar{c}}\epsilon^{a\bar{c}}\epsilon^{b\bar{d}}, && (3.1.60)\\
\mathcal{M}^{a\bar{d}} &= (2e^{\Lambda}N_{f\bar{c}}A^I_bA^J_e\epsilon^{fe} - 2e^{\Lambda}N_{b\bar{c}}a)\epsilon^{ab}\epsilon^{\bar{c}\bar{d}}, && (3.1.61)\\
\mathcal{M}^{\bar{c}\bar{d}} &= -2e^{\Lambda}N_{ab}\epsilon^{\bar{c}b}\epsilon^{a\bar{d}}, && (3.1.62)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}^{Ib} &= -\sqrt{2}A^J_a(M^{-1})^I_J\epsilon^{ab} + 2\sqrt{2}e^{\Lambda}N_{a\bar{d}}A^I_{\bar{c}}a\epsilon^{a\bar{d}}\epsilon^{\bar{d}b} \\
&- 2\sqrt{2}e^{\Lambda}N_{a\bar{d}}A^I_{\bar{c}}A^J_f A^K_e\epsilon^{a\bar{c}}\epsilon^{\bar{d}e}\epsilon^{fb}L_{JK}, \qquad (3.1.63)\\
\mathcal{M}^{ab} &= -\frac{1}{2}e^{-\Lambda}N_{\bar{c}\bar{d}}\epsilon^{a\bar{d}}\epsilon^{\bar{c}b} - 2\ A^I_{\bar{c}}A^J_{\bar{d}}(M^{-1})_{IJ}\epsilon^{a\bar{c}}\epsilon^{\bar{d}b} - 2\ e^{\Lambda}N_{\bar{c}\bar{d}}a^2\epsilon^{a\bar{d}}\epsilon^{\bar{c}b} \\
&- 2\ e^{\Lambda}N_{\bar{c}\bar{d}}A^I_e A^K_f A^K_g A^L_h\epsilon^{\bar{c}g}\epsilon^{\bar{d}h}\epsilon^{ae}\epsilon^{fb}L_{IJ}L_{KL} \qquad (3.1.64)\\
&+ 2\ e^{\Lambda}N_{\bar{c}\bar{d}}A^I_e A^J_f a\epsilon^{\bar{c}f}\epsilon^{ae}\epsilon^{\bar{d}b}L_{IJ} + 2\ e^{\Lambda}N_{\bar{c}\bar{d}}A^I_e A^J_f a\epsilon^{\bar{d}f}\epsilon^{a\bar{c}}\epsilon^{eb}L_{IJ}.
\end{aligned}
$$

Mit diesen Definitionen sowie (3.1.44) und (3.1.50) lässt sich dann der kinetische Term der Vektorfelder schreiben als

$$
S_{kin,1} = \frac{1}{8}\int d^4x\sqrt{-g}Im(\tau)\mathcal{M}_{MN}H^{M+}_{\mu\nu}H^{\mu\nu N+}, \qquad (3.1.65)
$$

so wie er in (3.1.1) auftritt.

Nun muss noch die Wirkung der skalaren Terme betrachtet werden. Dazu werden sowohl (2.4.9) als auch (3.1.17) betrachtet, da nach der Dualisierung der Zweiformwirkung ein neuer Skalar a auftritt, der ebenfalls einen kinetischen Term besitzt. Zusammen ergeben beide Terme eine Wirkung

$$
\begin{aligned}
S_{ska,dual} &= \int d^4x\sqrt{-g}\Big[+\frac{1}{8}\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi - \frac{1}{16}(\partial_\mu N_{ab})(\partial^\mu N^{ab}) \\
&+ \frac{1}{4}N^{ab}N^{cd}e^{-2\chi}(\partial_\mu b\epsilon_{ac})(\partial^\mu b\epsilon_{bd}) \\
&+ \frac{1}{2}e^{\Lambda}N^{cd}\partial_\mu A^I_c\partial^\mu A^J_d(M^{-1})_{IJ} \\
&+ \frac{1}{8}\partial_\mu\Lambda\partial^\mu\Lambda - \frac{1}{32}\partial_\mu(M^{-1})_{IJ}\partial^\mu M^{IJ} \\
&- \frac{2}{3}e^{2\Lambda}(A^I_a\partial_\mu A^J_b\epsilon^{ab}L_{IJ} + \partial_\mu a)(A^K_c\partial^\mu A^L_d\epsilon^{cd}L_{KL} + \partial^\mu a)\Big].
\end{aligned}
\qquad (3.1.66)
$$

Setzt man die Matrix $\mathcal{M}_{MN}$ (3.1.53) - (3.1.58) sowie deren Inverse $\mathcal{M}^{MN}$ in (3.1.1) ein, so ist es tatsächlich möglich, die Wirkung der skalaren Terme (3.1.66) bis auf die Wirkungen für b und χ, die sich mit Hilfe des Feldes τ

berechnen lassen, zu reproduzieren. Es gilt also

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{32}\int d^4x\ \sqrt{-g}\partial_\mu \mathcal{M}_{MN}\partial^\mu \mathcal{M}^{MN} &= \int d^4x\sqrt{-g}\Big[-\frac{1}{16}(\partial_\mu N_{ab})(\partial^\mu N^{ab})\\
&+ \frac{1}{2}e^{\Lambda}N^{cd}\partial_\mu A_c^I\partial^\mu A_d^J(M^{-1})_{IJ}\\
&+ \frac{1}{8}\partial_\mu\Lambda\partial^\mu\Lambda - \frac{1}{32}\partial_\mu(M^{-1})_{IJ}\partial^\mu M^{IJ}\\
&- \frac{2}{3}e^{2\Lambda}(A_a^I\partial_\mu A_b^J\epsilon^{ab}L_{IJ}+\partial_\mu a)\\
&\times (A_c^K\partial^\mu A_d^L\epsilon^{cd}L_{KL}+\partial^\mu a)\Big] \quad (3.1.67)
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{8Im(\tau)^2}\int d^4x\ \sqrt{-g}\partial_\mu\tau\partial^\mu\tau^* &= \int d^4x\sqrt{-g}\Big[\frac{1}{8}\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi\\
&+ \frac{1}{4}N^{ab}N^{cd}e^{-2\chi}(\partial_\mu b\epsilon_{ac})(\partial^\mu b\epsilon_{bd})\Big]
\end{aligned}
\quad (3.1.68)
$$

Abschließend kann man zusammenfassen, dass es in der Tat möglich ist, die reduzierte Theorie (2.4.9) mit dem kinetischen Term (3.1.1) zu vergleichen und somit die Feldstärke $H^{M+}_{\mu\nu}$, die skalaren Felder $\mathcal{M}_{MN}$ und τ sowie die $SO(6,22)$ Metrik η_{MN} zu bestimmen.[11]

3.2 Massiver Fall

Nachdem die elektrische Feldstärke $H^{M+}_{\mu\nu}$, die Metrik η_{MN} sowie die Skalarfelder $\mathcal{M}_{MN}$ und τ durch Vergleich der reduzierten Theorie (2.4.5) mit der Formel (3.1.1) bestimmt worden sind, wird nun die massive Theorie betrachtet, in der die Massen m^I nicht verschwinden. Bevor jedoch dieser Vergleich vorgestellt wird, wird wie im masselosen Fall zunächst die massive $\mathcal{N}=4$ Supergravitation präsentiert. Nachdem dann die allgemeine Struktur dieser Theorie erläutert worden ist, werden die weiteren Komponenten dieser Theorie, welche im masselosen Fall nicht auftreten, bestimmt.

[11] Da dieser Vergleich mit dem Vektor D^a_μ funktioniert und (3.1.1) einen rein elektrischen Term darstellt, wird dadurch auch im Nachhinein klar, dass D^a_μ ein elektrischer Vektor sein muss, und gleichbedeutend damit, dass $C_{\mu a}$ einen magnetischer Vektor darstellt, so dass die Dualisierung des magnetischen Feldes zu einem elektrischen Feld nachträglich gerechtfertigt wird.

3.2.1 Massive $\mathcal{N} = 4$ Supergravitation in vier Dimensionen

Im Vergleich zur masselosen Theorie, die im letzten Abschnitt sehr detailliert betrachtet worden ist, erscheinen in der massiven $\mathcal{N} = 4$ Supergravitation neue Größen, die hier erläutert werden. In der masselosen Theorie tauchen die elektrischen Vektoren H_μ^{M+}, die Skalare $\mathcal{M}_{MN}$ und τ sowie die Metrik η_{MN} auf. Die allgemeine $\mathcal{N} = 4$ Supergravitation kann mit Hilfe der Tensoren $f_{\alpha MNP} = f_{\alpha[MNP]}$ und $\xi_{\alpha M}$ beschrieben werden, welche Tensoren unter der globalen *on-shell* Symmetriegruppe $SL(2) \times SO(6,n), n \in \mathbb{N}$, sind mit $\alpha \in \{+,-\}$ und $M, N, P \in \{1, ..., 6+n\}$ [15], wobei sich später herausstellen wird, dass diese Strukurkonstanten proportional zu den Massen sind. Daraus folgt insbesondere, dass man im masselosen Fall $f_{\alpha MNP}, \xi_{\alpha M} \to 0$ die masselose Wirkung (3.1.1) erhält.

Weiterhin gibt es eine andere Möglichkeit, die Wirkung des Skalars τ zu beschreiben. Neben der im masselosen Fall beschriebenen Art und Weise kann man eine Matrix $\tilde{M}_{\alpha\beta} \in SL(2)$ definieren, die τ enthält:

$$\tilde{M}_{\alpha\beta} := \frac{1}{Im(\tau)} \begin{pmatrix} |\tau|^2 & Re(\tau) \\ Re(\tau) & 1 \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \{+,-\}. \tag{3.2.1}$$

Dessen Inverse ist gegeben durch

$$\tilde{M}^{\alpha\beta} = \frac{1}{Im(\tau)} \begin{pmatrix} 1 & -Re(\tau) \\ -Re(\tau) & |\tau|^2 \end{pmatrix}, \tag{3.2.2}$$

wobei die $SL(2)$ Symmetriewirkung

$$\tilde{M} \to g\tilde{M}g^T, \ g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2) \tag{3.2.3}$$

auf τ als Möbius Transformation

$$\tau \to \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \tag{3.2.4}$$

wirkt.

Mit dieser Matrix lässt sich ebenso der kinetische Term $\frac{1}{Im(\tau)^2}\partial_\mu\tau\partial^\mu\tau^*$ für τ, der in (3.1.1) auftritt, schreiben als

$$Im(\tau)^{-2}(\partial_\mu\tau)(\partial^\mu\tau^*) = -\frac{1}{2}(\partial_\mu\tilde{M}_{\alpha\beta})(\partial^\mu\tilde{M}^{\alpha\beta}). \tag{3.2.5}$$

Des Weiteren treten neben den elektrischen Vektoren, die bereits im masselosen Fall betrachtet worden sind, auch magnetische Vektoren auf. Die elektrischen Vektoren H_μ^{M+} bilden einen $SO(6,n)$ Vektor und tragen die Ladung

+1 unter der $SO(1,1)$, wohingegen die magnetischen Vektoren H_μ^{M-} zwar auch einen $SO(6,n)$ Vektor bilden, diese jedoch die Ladung -1 unter der $SO(1,1)$ besitzen.

Um später zusätzlich das Potential der $\mathcal{N}=4, D=4$ Supergravitation aufschreiben zu können, benötigt man weiterhin einen vollständig antisymmetrischen Tensor, der die Skalare enthält, die in $\mathcal{M}_{MN}$ auftauchen. Man definiert deshalb:

$$\mathcal{M}_{MNPQRS} := \epsilon_{mnopqr}\mathcal{V}_M^m\mathcal{V}_N^n\mathcal{V}_P^o\mathcal{V}_Q^p\mathcal{V}_R^q\mathcal{V}_S^r. \tag{3.2.6}$$

In [15] wurde gezeigt, dass sich mit diesen Definitionen jede $\mathcal{N}=4$ Supergravitation in vier Dimensionen formulieren lässt. Im Gegensatz zum masselosen Fall enthält diese Theorie neben (3.1.1) mit kovarianten Ableitungen und allgemeinen Feldstärken einen zusätzlichen topologischen Term sowie ein Potential:

$$S := S_{kin} + S_{top} + S_{pot}, \tag{3.2.7}$$

wobei der kinetische Term sich aus dem masselosen Fall (3.1.1) dadurch ergibt, dass man die gewöhnlichen Ableitungen durch kovariante Ableitungen und allgemeine Feldstärken ersetzt, die im Anschluss vorgestellt werden:

$$\begin{aligned} S_{kin} &:= \int d^4x\sqrt{-g}\Big(\frac{1}{2}R + \frac{1}{16}D_\mu\mathcal{M}_{MN}D^\mu\mathcal{M}^{MN} - \frac{1}{4Im(\tau)^2}D_\mu\tau D^\mu\tau^* \\ &- \frac{1}{4}Im(\tau)\mathcal{M}_{MN}H_{\mu\nu}^{M+}H^{\mu\nu N+}\Big) \\ &+ \frac{1}{8}\int d^4x Re(\tau)\eta_{MN}\epsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}H_{\mu\nu}^{M+}H_{\varrho\sigma}^{N+}. \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

Der topologische Wirkungsterm und das Potential, die neben diesem kinetischen Term auftauchen, lauten in voller Allgemeinheit:

$$\begin{aligned} S_{top} := \int \; &- \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\varrho\lambda}\Big(\xi_{+M}\eta_{NP}H_\mu^{M-}H_\nu^{N+}\partial_\varrho H_\lambda^{P+} \\ &- (\hat{f}_{-MNP} + 2\xi_{-N}\eta_{MP})H_\mu^{M-}H_\nu^{N+}\partial_\varrho H_\lambda^{P-} \\ &+ \frac{1}{16}\Theta_{+MNP}\Theta_{-\ \ QR}^{\ \ M}B_{\mu\nu}^{NP}B_{\varrho\lambda}^{QR} \\ &- \frac{1}{4}\hat{f}_{\alpha MNR}\hat{f}_{\beta PQ}{}^R H_\mu^{M\alpha}H_\nu^{N+}H_\varrho^{P\beta}H_\lambda^{Q-} \\ &- \frac{1}{4}\left(\Theta_{-MNP}B_{\mu\nu}^{NP} + \xi_{-M}B_{\mu\nu}^{+-} + \xi_{+M}B_{\mu\nu}^{++}\right) \\ &\times \; (2\partial_\varrho H_\lambda^{M-} - \hat{f}_{\alpha QR}^{\ \ M}H_\varrho^{Q\alpha}H_\lambda^{R-})\Big) \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

und

$$S_{pot} := -\frac{1}{16}\int d^4x\sqrt{-g}\Big\{f_{\alpha MNP}f_{\beta QRS}\tilde{M}^{\alpha\beta}\Big(\frac{1}{3}\mathcal{M}^{MQ}\mathcal{M}^{NR}\mathcal{M}^{PS} + \left(\frac{2}{3}\eta^{MQ} - \mathcal{M}^{MQ}\right)\eta^{NR}\eta^{PS}\Big) - \frac{4}{9}f_{\alpha MNP}f_{\beta QRS}\epsilon^{\alpha\beta}\mathcal{M}^{MNPQRS} + 3\xi^M_\alpha\xi^N_\beta\tilde{M}^{\alpha\beta}\mathcal{M}_{MN}\Big\}, \tag{3.2.10}$$

wobei im Gegensatz zu [15] die Reskalierungen $f_{\alpha MNP} \to \tilde{g}^{-1}f_{\alpha MNP}$ and $\xi_{\alpha M} \to \tilde{g}^{-1}\xi_{\alpha M}$ durchgeführt wurden. ($\tilde{g}$ bezeichnet eine globale Eichkopplung.)

Die regelmässig auftretenden Tensoren $\Theta_{\alpha MNP}$ und $\hat{f}_{\alpha MNP}$ sind definiert als[12]:

$$\Theta_{\alpha MNP} := f_{\alpha MNP} - \xi_{\alpha[N}\eta_{P]M}, \tag{3.2.11}$$

$$\hat{f}_{\alpha MNP} := f_{\alpha MNP} - \xi_{\alpha[M}\eta_{P]N} - \frac{3}{2}\xi_{\alpha N}\eta_{MP}. \tag{3.2.12}$$

Die kovarianten Ableitunge nehmen die Gestalt

$$D_\mu\mathcal{M}_{MN} = \partial_\mu\mathcal{M}_{MN} + 2H_\mu^{P\alpha}\Theta_{\alpha P(M}{}^Q\mathcal{M}_{N)Q}, \tag{3.2.13}$$

$$D_\mu\tilde{M}_{\alpha\beta} = \partial_\mu\tilde{M}_{\alpha\beta} + H_\mu^{M\gamma}\xi_{(\alpha M}\tilde{M}_{\beta)\gamma} - H_\mu^{M\delta}\xi_{\epsilon M}\epsilon_{\delta(\alpha}\epsilon^{\epsilon\gamma}\tilde{M}_{\beta)\gamma} \tag{3.2.14}$$

an, wobei man im kinetischen Term (3.2.8)

$$Im(\tau)^{-2}(D_\mu\tau)(D^\mu\tau^*) = -\frac{1}{2}(D_\mu\tilde{M}_{\alpha\beta})(D^\mu\tilde{M}^{\alpha\beta}) \tag{3.2.15}$$

identifizieren kann, indem man Definition (3.2.1) verwendet. Die kovarianten Feldstärken schließlich sind gegeben durch[13]

$$H_{\mu\nu}^{M+} := \partial_{[\mu}H_{\nu]}^{M+} - \frac{1}{2}\hat{f}_{\alpha NP}{}^M H_{[\mu}^{N\alpha}H_{\nu]}^{P+} + \frac{1}{4}\Theta_-{}^M{}_{NP}B_{\mu\nu}^{NP} + \frac{1}{4}\xi_+^M B_{\mu\nu}^{++} + \frac{1}{4}\xi_-^M B_{\mu\nu}^{+-}, \tag{3.2.16}$$

$$H_{\mu\nu}^{M-} := \partial_{[\mu}H_{\nu]}^{M-} - \frac{1}{2}\hat{f}_{\alpha NP}{}^M H_{[\mu}^{N\alpha}H_{\nu]}^{P-} - \frac{1}{4}\Theta_+{}^M{}_{NP}B_{\mu\nu}^{NP} + \frac{1}{4}\xi_-^M B_{\mu\nu}^{--} + \frac{1}{4}\xi_+^M B_{\mu\nu}^{+-}, \tag{3.2.17}$$

[12] In diesem Fall ist $\hat{f}_{\alpha MNP}$ nicht sechsdimensional. Es ist die Notation von [15] übernommen worden.

[13] Diese Definitionen unterscheiden sich von [15] durch die Reskalierung $H_{\mu\nu}^{M\alpha} \to \frac{1}{2}H_{\mu\nu}^{M\alpha}, \alpha \in \{+,-\}$.

wobei man zwei Arten von Zweiformfeldern vorliegen hat, nämlich $B^{MN}_{\mu\nu} = B^{[MN]}_{\mu\nu}$ und $B^{\alpha\beta}_{\mu\nu} = B^{(\alpha\beta)}_{\mu\nu} = (B^{++}_{\mu\nu}, B^{+-}_{\mu\nu}, B^{--}_{\mu\nu})$. Im Fall $f_{\alpha MNP} = \xi_{\alpha M} \to 0$ verschwinden der topologische Term und das Potential, gehen die kovarianten Ableitungen über in gewöhnliche Ableitungen $D_\mu \to \partial_\mu$ und die elektrische Feldstärke (3.2.16) wird zu (3.1.6), so dass sich in diesem Fall gerade die masselose Theorie ergibt, die in Abschnitt 3.1 untersucht worden ist.

Weiterhin muss berücksichtigt werden, dass in (3.2.8) weder kinetische Terme für Zweiformen noch für magnetische Vektoren existieren. Dies kann man verstehen, wenn man bedenkt, dass sich unter Verwendung der ersten Ordnung Bewegungsgleichungen magnetische Vektoren dual zu elektrischen Vektoren und Zweiformfelder dual zu Skalaren herausstellen.

Abschließend wird noch erwähnt, dass die beiden konstanten Tensoren $\xi_{\alpha M}$ und $f_{\alpha MNP}$ einige quadratische Bedingungen erfüllen müssen, die sich folgendermaßen formulieren lassen:

$$
\begin{aligned}
\xi^M_\alpha \xi_{\beta M} &= 0, \\
\xi^P_{(\alpha} f_{\beta)PMN} &= 0, \\
3 f_{\alpha R[MN} f_{\beta PQ]}{}^R + 2\xi_{(\alpha[M} f_{\beta)NPQ]} &= 0, \\
\epsilon^{\alpha\beta}(\xi^P_\alpha f_{\beta PMN} + \xi_{\alpha M}\xi_{\beta N}) &= 0, \\
\epsilon^{\alpha\beta}(f_{\alpha MNR} f_{\beta PQ}{}^R - \xi^R_\alpha f_{\beta R[M[P}\eta_{Q]N]} - \xi_{\alpha[M} f_{N][PQ]\beta} + \xi_{\alpha[P} f_{Q][MN]\beta}) &= 0.
\end{aligned}
\tag{3.2.18}
$$

3.2.2 Bestimmung der Strukturkonstanten

Nachdem die Theorie für die $\mathcal{N} = 4$ Supergravitation vorgestellt worden ist, fehlt die Bestimmung der Strukturkonstanten $f_{\alpha MNP}$ und $\xi_{\alpha M}$, welche im masselosen Fall nicht determiniert werden konnten. Zu diesem Zweck wird zunächst nur das Potential (2.5.17) betrachtet, um ihn mit dem Potential (3.2.10) zu vergleichen. Da sich (3.2.10) bei allen späteren Berechnungen nicht ändern wird, ist diese Gleichung ideal dazu geeignet, um die Strukturkonstanten zu bestimmen, selbst wenn man die beiden Wirkungen nicht vollständig miteinander verglichen hat.

Bevor dieser Vergleich durchgeführt wird, muss man berücksichtigen, dass die Terme, die τ enthalten[14], genauso durch die Matrix $\tilde{M}_{\alpha\beta}$ (3.2.1), dessen Inverse durch (3.2.2) gegeben ist, ausgedrückt werden können. Mit Hilfe der

[14]Die Terme τ und $\mathcal{M}_{MN}$ sind gerade die Terme, die im masselosen Fall bestimmt wurden; sie ändern sich in der massiven Theorie nicht, sondern es kommen lediglich die Strukturkonstanten hinzu. Im masselosen Fall gehen $f_{\alpha MNP}, \xi_{\alpha M} \to 0$ und man erhält die masselose Theorie (2.4.5).

Gleichung

$$N^{ab}N^{cd}\epsilon_{ac}\epsilon_{bd} = 2\det N^{-1} = 2 \tag{3.2.19}$$

lässt sich das Potential (2.5.17) schreiben als[15]

$$\begin{aligned} S_{pot} &= \int d^4x\sqrt{-g}\Big[-4e^{2\Lambda-\chi}b^2m^I(M^{-1})_{IJ}m^J \\ &- e^{\chi+2\Lambda}m^I(M^{-1})_{IJ}m^J\Big], \end{aligned} \tag{3.2.20}$$

wobei im ersten Summanden $b^2 \sim Re(\tau)^2$ auftritt, allerdings nicht $b \sim Re(\tau)$, so dass man daraus schließen kann, dass in (3.2.10) nur der Term $\tilde{M}^{--} \sim |\tau|^2 \sim Re(\tau)^2$ auftritt, nicht jedoch die anderen Einträge dieser Matrix. Wenn man (3.2.10) betrachtet und berücksichtigt, dass nur der Eintrag $\tilde{M}^{--}$ vorkommt, folgt daraus sofort, dass

$$f_{+MNP} \equiv 0\ \forall M, N, P. \tag{3.2.21}$$

Aus dem gleichen Grund kann man schließen, dass

$$\xi_{+M} \equiv 0\ \forall M. \tag{3.2.22}$$

Da $f_{+MNP} \equiv 0$, erkennt man sofort, dass $-\frac{4}{9}f_{\alpha MNP}f_{\beta QRS}\epsilon^{\alpha\beta}M^{MNPQRS}$ in (3.2.10) wegen der Antisymmetrie von $\epsilon_{\alpha\beta}$ verschwinden muss, so dass nur noch die Aufgabe bleibt, f_{-MNP} und ξ_{-M} zu bestimmen. Mit dieser Information wird (3.2.10) zu

$$\begin{aligned} S_{pot} = -\frac{1}{16}\int d^4x\sqrt{-g}\ \ &\Big[\ f_-^{MNP}f_-^{QRS}\tilde{M}^{--}\Big(\frac{1}{3}\mathcal{M}_{MQ}\mathcal{M}_{NR}\mathcal{M}_{PS} \\ &+\ \Big(\frac{2}{3}\eta_{MQ}-\mathcal{M}_{MQ}\Big)\eta_{NR}\eta_{PS}\Big) \\ &+\ 3\xi_-^M\xi_-^N\tilde{M}^{--}\mathcal{M}_{MN}\Big], \end{aligned} \tag{3.2.23}$$

wobei die Indizes $M, ..., S$ durch die Metrik η_{MN} gehoben und heruntergesetzt werden.
Setzt man nun $\tilde{M}^{--} = \frac{1}{Im(\tau)}|\tau|^2 = 8b^2e^{-\chi} + 2e^{\chi}$, wobei τ aus (3.1.51) verwendet worden ist, erhält (3.2.23) die Form

$$\begin{aligned} S_{pot} = -\frac{1}{16}\int d^4x\sqrt{-g}\ \ &\Big[\ f_-^{MNP}f_-^{QRS}(8b^2e^{-\chi}+2e^{\chi})\Big(\frac{1}{3}\mathcal{M}_{MQ}\mathcal{M}_{NR}\mathcal{M}_{PS} \\ &+\ \Big(\frac{2}{3}\eta_{MQ}-\mathcal{M}_{MQ}\Big)\eta_{NR}\eta_{PS}\Big) \\ &+\ 3\xi_-^M\xi_-^N(8b^2e^{-\chi}+2e^{\chi})\mathcal{M}_{MN}\Big]. \end{aligned} \tag{3.2.24}$$

[15]Wegen der Angleichung der Vorfaktoren der Einstein-Hilbert Terme (2.5.14) und (3.2.8) ist (2.5.17) zusätzlich mit einem Faktor -2 multipliziert worden.

Betrachtet man den Wirkungsterm (3.2.20), sieht man, dass f_-^{MNP} proportional zu m^I sein muss. Deshalb bietet es sich an, als erstes die Konstante $f_-^{Ia_1a_2}$ zu bestimmen, wobei sich die Terme $f_-^{a_1Ia_2}$ und $f_-^{a_1a_2I}$ sofort durch die Antisymmetrie von f_{-MNP} ergeben. Durch Vergleich von (3.2.20) mit (3.2.24) sieht man, dass die Exponenten in den Exponentialfunktionen nicht übereinstimmen; diese müssen also durch die Matrix $\mathcal{M}_{MN}$ nachträglich generiert werden, damit (3.2.24) und (3.2.20) übereinstimmen. Zu diesem Zweck wird nur der ersten Summand von (3.2.24) betrachtet, da nur in diesem Fall die fehlenden Exponenten erzeugt werden können:

$$\mathcal{L}_{pot,1} := -\frac{1}{16} f_-^{MNP} f_-^{QRS} \left(8b^2 e^{-\chi} + 2e^{\chi}\right) \left(\frac{1}{3}\mathcal{M}_{MQ}\mathcal{M}_{NR}\mathcal{M}_{PS}\right). \tag{3.2.25}$$

Berücksichtigt man, dass nur $f_-^{Ia_1a_2}$ und seine Permutationen betrachtet werden, und setzt man diese Konstanten ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{pot,1} \;=\; & -\frac{1}{48}\left(8b^2 e^{-\chi} + 2e^{\chi}\right) \Big[f_-^{Ia_1a_2} f_-^{Jb_1b_2} \mathcal{M}_{IJ}\mathcal{M}_{a_1a_2}\mathcal{M}_{b_1b_2} \\
&+ f_-^{Ia_1a_2} f_-^{b_1b_2J} \mathcal{M}_{Ib_1}\mathcal{M}_{a_1b_2}\mathcal{M}_{a_2J} + f_-^{Ia_1a_2} f_-^{b_1Jb_2} \mathcal{M}_{Ib_1}\mathcal{M}_{a_1J}\mathcal{M}_{a_2b_2} \\
&+ f_-^{a_1a_2I} f_-^{Jb_1b_2} \mathcal{M}_{a_1J}\mathcal{M}_{a_2b_1}\mathcal{M}_{Ib_2} + f_-^{a_1a_2I} f_-^{b_1b_2J} \mathcal{M}_{a_1a_2}\mathcal{M}_{a_2J}\mathcal{M}_{Ib_2} \\
&+ f_-^{a_1a_2I} f_-^{b_1Jb_2} \mathcal{M}_{a_1b_1}\mathcal{M}_{a_2J}\mathcal{M}_{Ib_2} + f_-^{a_1Ia_2} f_-^{Jb_1b_2} \mathcal{M}_{a_1J}\mathcal{M}_{Ib_1}\mathcal{M}_{a_2b_2} \\
&+ f_-^{a_1Ia_2} f_-^{b_1b_2J} \mathcal{M}_{a_1b_1}\mathcal{M}_{Ib_2}\mathcal{M}_{a_2J} + f_-^{a_1Ia_2} f_-^{b_1Jb_2} \mathcal{M}_{a_1b_1}\mathcal{M}_{IJ}\mathcal{M}_{a_2b_2} \Big],
\end{aligned} \tag{3.2.26}$$

wobei man nach Ausnutzung der Antisymmetrie von f_-^{MNP}

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{pot,1} \;=\; & -\frac{1}{16}\left(8b^2 e^{-\chi} + 2e^{\chi}\right) f_-^{Ia_1a_2} f_-^{Jb_1b_2} (\mathcal{M}_{IJ}\mathcal{M}_{a_1b_1}\mathcal{M}_{a_2b_2} \\
&- 2\mathcal{M}_{Ib_1}\mathcal{M}_{a_1J}\mathcal{M}_{a_2b_2})
\end{aligned} \tag{3.2.27}$$

erhält. Setzt man die Ausdrücke (3.1.53), (3.1.54) und (3.1.55) für die Matrix $\mathcal{M}$ ein, nimmt dieser Ausdruck die folgende Form an

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{pot,1} \;=\; & -\frac{1}{16}(8b^2 e^{-\chi} + 2e^{\chi}) f_-^{Ia_1a_2} f_-^{Jb_1b_2} (4e^{2\Lambda} N_{a_1b_1} N_{a_2b_2} (M^{-1})_{IJ} \\
&+ 16 e^{3\Lambda} N_{a_1b_1} N_{a_2b_2} N_{a_3b_3} A^K_{\bar{c}} A^L_{\bar{d}} \epsilon^{a_3\bar{c}} \epsilon^{b_3\bar{d}} L_{IK} L_{LJ} \\
&- 32 e^{3\Lambda} N_{a_2b_2} N_{a_3b_1} N_{a_1b_3} A^K_{\bar{c}} A^L_{\bar{d}} \epsilon^{a_3\bar{c}} \epsilon^{b_3\bar{d}} L_{IK} L_{LJ}).
\end{aligned} \tag{3.2.28}$$

Dieser Ausdruck wird nun mit (3.2.20) verglichen, so dass sich die Gleichung

$$\begin{aligned} & - \quad (4b^2 e^{-\chi} + e^{\chi}) e^{2\Lambda} m^I (M^{-1})_{IJ} m^J \\ = & - \quad \frac{1}{16}(8b^2 e^{-\chi} + 2e^{\chi}) f_-^{Ia_1a_2} f_-^{Jb_1b_2} (4e^{2\Lambda} N_{a_1b_1} N_{a_2b_2} (M^{-1})_{IJ} \\ & + \quad 16 e^{3\Lambda} N_{a_1b_1} N_{a_2b_2} N_{a_3b_3} A_{\bar{c}}^K A_{\bar{d}}^L \epsilon^{a_3\bar{c}} \epsilon^{b_3\bar{d}} L_{IK} L_{LJ} \\ & - \quad 32 e^{3\Lambda} N_{a_2b_2} N_{a_3b_1} N_{a_1b_3} A_{\bar{c}}^K A_{\bar{d}}^L \epsilon^{a_3\bar{c}} \epsilon^{b_3\bar{d}} L_{IK} L_{LJ}) \end{aligned} \tag{3.2.29}$$

ergibt. Um diese Gleichung zu lösen, mache man zunächst den Ansatz

$$f_-^{Ia_1a_2} = \gamma m^I \epsilon^{a_1a_2}, \;\; \gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \tag{3.2.30}$$

Setzt man nun (3.2.30) in (3.2.29) ein und verwendet (3.2.19) sowie

$$N_{a_2b_2} N_{a_1b_3} \epsilon^{a_1a_2} = \epsilon_{b_3b_2}, \tag{3.2.31}$$

vereinfacht sich (3.2.29) zu

$$\gamma^2 (4b^2 e^{-\chi} + e^{\chi}) e^{2\Lambda} m^I (M^{-1})_{IJ} m^J = (4b^2 e^{-\chi} + e^{\chi}) e^{2\Lambda} m^I (M^{-1})_{IJ} m^J, \tag{3.2.32}$$

die durch $\gamma = 1$ gelöst wird, so dass man schließlich

$$f_-^{Iab} \;\; = \;\; m^I \epsilon^{ab} \tag{3.2.33}$$

erhält.

Damit sieht man, dass das gesamte Potential, das das Ergebnis der Kaluza-Klein Reduktion einer massiven sechsdimensionalen Supergravitation ist, konstruiert werden kann, indem man das Ergebnis (3.2.33) verwendet.[16] Daraus folgt, dass alle weiteren Terme f_-^{MNP} mit anderen Indizes verschwinden müssen, so dass man insgesamt erhält:

$$f_-^{MNP} = \begin{cases} m^I \epsilon^{ab}, & \text{falls } M = I, N = a, P = b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \tag{3.2.34}$$

wobei sich das Vorzeichen jedes Mal ändert, wenn man zwei Indizes vertauscht.

Da bereits mit diesen Konstanten (2.5.17) hergeleitet werden kann, muss der letzte Summand in (3.2.24) verschwinden, so dass sich ergibt

$$\xi_{-M} \equiv 0. \tag{3.2.35}$$

[16] In der Tat verschwindet auch der Term $f_-^{MNP} f_-^{QRS} \left(\frac{2}{3}\eta_{MQ} - \mathcal{M}_{MQ}\right) \eta_{NR} \eta_{PS}$, wenn man (3.2.33) in (3.2.24) einsetzt.

Da sowohl ξ_{+M} als auch ξ_{-M} konstant gleich null sind, reduzieren sich die Strukturkonstanten $\hat{f}_{\alpha MNP}$ und $\Theta_{\alpha MNP}$ (3.2.11,3.2.12) zu

$$\Theta_{+MNP} = \hat{f}_{+MNP} = f_{+MNP} \equiv 0, \tag{3.2.36}$$

$$\Theta_{-MNP} = \hat{f}_{-MNP} = f_{-MNP} = \begin{cases} m_I \epsilon_{ab}, & \text{falls } M = I, N = a, P = b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{3.2.37}$$

unter der Berücksichtigung der Antisymmetrie in M, N und P sowie $m_I = L_{IJ} m^J$.

Damit vereinfachen sich die kovarianten Ableitungen (3.2.13) und (3.2.14) zu

$$D_\mu \mathcal{M}_{MN} = \partial_\mu \mathcal{M}_{MN} + 2H_\mu^{P-} \Theta_{-P(M}{}^Q \mathcal{M}_{N)Q} \tag{3.2.38}$$

$$D_\mu M_{\alpha\beta} = \partial_\mu M_{\alpha\beta}. \tag{3.2.39}$$

Setzt man die Ausdrücke (3.2.37) in (3.2.38) ein, so erhält man insbesondere für die kovarianten Ableitungen von $\mathcal{M}_{MN}$

$$D_\mu \mathcal{M}_{IJ} = \partial_\mu \mathcal{M}_{IJ} - 2H_\mu^{a-} \epsilon_a^b m_{(I} \mathcal{M}_{J)b} \tag{3.2.40}$$

$$D_\mu \mathcal{M}_{ab} = \partial_\mu \mathcal{M}_{ab} + 2H_\mu^{I-} m_I \epsilon_{(a}^{b_2} \mathcal{M}_{b)b_2} - 2H_\mu^{b_2-} m^I \epsilon_{(ab_2} \mathcal{M}_{b)I} \tag{3.2.41}$$

$$\begin{aligned} D_\mu \mathcal{M}_{Ib} &= \partial_\mu \mathcal{M}_{Ib} - 2H_\mu^{a-} m_I \epsilon_a^{b_2} \mathcal{M}_{bb_2} + 2H_\mu^{J-} m_J \epsilon_b^{b_2} \mathcal{M}_{Ib_2} \\ &- 2H_\mu^{a-} m^J \epsilon_{ba} \mathcal{M}_{IJ} \end{aligned} \tag{3.2.42}$$

$$D_\mu \mathcal{M}_{a\bar{d}} = \partial_\mu \mathcal{M}_{a\bar{d}} + 2H_\mu^{I-} m_I \epsilon_a^b \mathcal{M}_{b\bar{d}} - 2H_\mu^{b-} m^I \epsilon_{ab} \mathcal{M}_{I\bar{d}} \tag{3.2.43}$$

$$D_\mu \mathcal{M}_{I\bar{d}} = \partial_\mu \mathcal{M}_{I\bar{d}} - 2H_\mu^{a-} m_I \epsilon_a^b \mathcal{M}_{b\bar{d}} \tag{3.2.44}$$

$$D_\mu \mathcal{M}_{\bar{c}\bar{d}} = \partial_\mu \mathcal{M}_{\bar{c}\bar{d}} \tag{3.2.45}$$

Da $\tau \sim M_{\alpha\beta}$, erkennt man, dass die kovariante Ableitung gleich der partiellen Ableitung ist, womit man sieht, dass der kinetische Term für b und χ im massiven Fall die gleiche Form hat wie in der masselosen Theorie.

3.2.3 Dualisierung eines massiven Zweiformfeldes

In Abschnitt 3.1.4 war es möglich, die Felder τ (3.1.51), $\mathcal{M}_{MN}$ (3.1.53 - 3.1.58), H_μ^{M+} (3.1.44) sowie die entsprechende $SO(6,22)$ Metrik η_{MN} (3.1.45) zu bestimmen und die Wirkung (2.4.5) der masselosen Theorie mit (3.1.1) zu vergleichen. Nachdem diese Felder bestimmt worden waren, war es im letzten Abschnitt möglich die fehlenden Strukturkonstanten $f_{\alpha MNP}$ und $\xi_{\alpha M}$ zu bekommen, die auftauchen, wenn man alle Massen m^I in (2.1.2) einschaltet und die entstehende Supergravitation zu einer vierdimensionalen Theorie reduziert. Genauso wie im masselosen Fall eine Dualisierung der Wirkung der Zweiform notwendig war, da in (3.1.1) kein kinetischer Term von Zweiformen auftritt, ist es im massiven Fall nötig, die Dualisierung der Zweiformterme durchzuführen.

Indem man die Massen m^I in (2.1.2) einschaltet, werden die Zweiformen massiv. Im Unterschied zum masselosen Fall, in der die Wirkung einer Zweiform dual zu der kinetischen Wirkung eines Skalars ist, wird sich zeigen, dass sie im massiven Fall dual zu der Wirkung eines Vektors ist. Man kann dies über einen allgemeinen Higgs Mechanismus verstehen, bei dem eine Zweiform eine masselose Einsform "isst", so dass eine massive Zweiform nur noch $\binom{3}{2}$ physikalische Freiheitsgrade beschreibt. Da $\binom{3}{2} = \binom{3}{1}$ gilt, erkennt man ebenfalls, dass die Wirkung einer massiven Zweiform äquivalent zu der Wirkung eines Vektors ist.

Im Folgenden wird also die Wirkung einer massiven Zweiform dualisiert, wobei sich als dessen Ergebnis tatsächlich die Wirkung eines neuen Vektors P_μ ergibt.

Es wird nun also die Wirkung der massiven Zweiform betrachtet. Schaut man sich alle Terme in (2.5.13) an, die $B_{\mu\nu}$ enthalten, bekommt man eine Wirkung, die lautet

$$\begin{aligned}
S_2 &= \frac{1}{12}\int d^4x\sqrt{-g}e^{-2\Lambda}\left(\partial_\mu B_{\varrho\kappa} - \frac{1}{\sqrt{2}}C_{\mu a}V^a_{\varrho\kappa} - \frac{1}{\sqrt{2}}C_{\varrho\kappa a}V^a_\mu + \text{z.P.}\right)\\
&\times \left(\partial^\mu B^{\varrho\kappa} - \frac{1}{\sqrt{2}}C^\mu_b V^{\varrho\kappa b} - \frac{1}{\sqrt{2}}C^{\varrho\kappa}_b V^{\mu b} + \text{z.P.}\right)\\
&+ \frac{1}{4}\int d^4x\sqrt{-g}e^{\chi}[(F^I_{\mu\varrho} + \sqrt{2}V^a_{\mu\varrho}A^I_a) + 2m^I(B_{\mu\varrho} + \sqrt{2}V^a_{[\mu}C_{\varrho]a})]\\
&\times [(F^{\mu\varrho J} + \sqrt{2}V^{\mu\varrho b}A^J_b) + 2m^J(B^{\mu\varrho} + \sqrt{2}V^{[\mu b}C^{\varrho]}_b)](M^{-1})_{IJ}\\
&+ \int \epsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}\Big[\frac{1}{2}\partial_\mu B_{\varrho\sigma}A^I_a\partial_\nu A^J_b\epsilon^{ab}L_{IJ} + bB_{\mu\nu}B_{\varrho\sigma}m^I L_{IJ}m^J\\
&- 2B_{\mu\nu}(C_{\varrho a} - \sqrt{2}V^c_\varrho b\epsilon_{ac})\partial_\sigma A^J_b\epsilon^{ab}m^I L_{IJ}\\
&+ 2bB_{\mu\nu}\Big(-\frac{1}{\sqrt{2}}V^c_\varrho C_{\sigma c} + \frac{1}{\sqrt{2}}V^d_\sigma C_{\varrho d} + 2V^c_\varrho V^d_\sigma b\epsilon_{cd}\Big)m^I L_{IJ}m^J\\
&- 2B_{\mu\nu}(C_{\varrho a} - \sqrt{2}V^c_\varrho b\epsilon_{ac})(C_{\sigma b} - \sqrt{2}V^d_\sigma b\epsilon_{bd})\epsilon^{ab}m^I L_{IJ}m^J\\
&+ 2bB_{\mu\nu}\Big(\frac{1}{2}F^J_{\varrho\sigma} + \sqrt{2}\partial_\varrho(V^c_\sigma A^J_c)\Big)m^I L_{IJ}\Big]. \qquad (3.2.46)
\end{aligned}$$

Es ist wichtig festzustellen, dass im topologischen Term sowohl ein quadratischer als auch lineare Terme in $B_{\mu\nu}$ auftreten, wobei es für die spätere Dualisierung notwendig sein wird, alle Faktoren, die mit $B_{\mu\nu}$ multipliziert werden, in eine antisymmetrische Form zu bringen. Dies ist jedoch kein Problem, da die meisten Terme bereits in solch einer Form vorkommen und da eine Antisymmetrisierung jederzeit wegen der Antisymmetrie von $\epsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}$ möglich ist. Nach der Antisymmetrisierung lautet der topologische Anteil der Wirkung:

$$
\begin{aligned}
S_{2,top} &= \int \epsilon^{\mu\nu\varrho\sigma} B_{\mu\nu}\Big[-\frac{1}{2} B_{\varrho\sigma}\partial_\mu A^I_a \partial_\nu A^J_b \epsilon^{ab} L_{IJ} \\
&- C_{[\varrho a}\partial_{\sigma]} A^J_b \epsilon^{ab} m^I L_{IJ} \\
&+ \sqrt{2} b V^c_{[\varrho} C_{\sigma]c} m^I L_{IJ} m^J \\
&- 2 C_{\varrho a} C_{\sigma b} \epsilon^{ab} m^I L_{IJ} m^J \\
&+ b F^J_{\varrho\sigma} m^I L_{IJ} \\
&+ \sqrt{2} b V^c_{\varrho\sigma} A^J_c m^I L_{IJ}\Big].
\end{aligned}
\tag{3.2.47}
$$

Mit diesem topologischen Term ist es schließlich möglich, die Dualisierung der massiven Zweiform durchzuführen. Hier wird nur das Ergebnis dargestellt; der Leser, der daran interessiert ist, die Rechenschritte nachzuvollziehen, die zu diesem Ergebnis führen, wird auf Anhang C verwiesen. Um eine bessere Lesbarkeit zu erreichen und die auftretende Berechnung mit Anhang C zu vergleichen, definiere man

$$J^I_{\mu\varrho} := F^I_{\mu\varrho} + \sqrt{2} V^a_{\mu\varrho} A^I_a + 2\sqrt{2} V^a_{[\mu} C_{\varrho]a} m^I, \tag{3.2.48}$$

$$L_{\mu\varrho\kappa} := -\frac{1}{\sqrt{2}} C_{\mu a} V^a_{\varrho\kappa} - \frac{1}{\sqrt{2}} C_{\varrho\kappa a} V^a_\mu + \text{z.P.}, \tag{3.2.49}$$

$$
\begin{aligned}
K_{\varrho\sigma} &:= \big(-\frac{1}{2}\partial_\varrho A^I_a \partial_\sigma A^J_b - C_{[\varrho a}\partial_{\sigma]} A^J_b m^I + \frac{1}{2} b\epsilon_{ab} F^I_{\varrho\sigma} m^J + \frac{\sqrt{2}}{2} b\epsilon_{ab} V^c_{\varrho\sigma} A^I_c m^J \\
&- 2 C_{\varrho a} C_{\sigma b} m^I m^J + \frac{\sqrt{2}}{2} b\epsilon_{ab} C_{[\sigma c} V^c_{\varrho]} m^I m^J \big) \epsilon^{ab} L_{IJ},
\end{aligned}
\tag{3.2.50}
$$

$$\alpha := b m^I L_{IJ} m^J, \tag{3.2.51}$$

$$\beta := e^\chi m^I (M^{-1})_{IJ} m^J, \tag{3.2.52}$$

$$g := \frac{1}{2} e^{-2\Lambda}. \tag{3.2.53}$$

Führt man die Dualisierung aus, wie sie in Anhang C beschrieben wird, erhält man eine Wirkung, die nicht mehr von $B_{\mu\nu}$, sondern nur noch vom dualisierten Feld P_μ abhängt. Mit den Definitionen (3.2.48) - (3.2.53) ergibt sich eine Lagrangedichte, die sich folgendermaßen schreiben lässt

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{2,dual} = & - \frac{1}{g} P_\mu P^\mu + \frac{1}{3} P_\mu L_{\varrho\sigma\lambda} \epsilon^{\varrho\sigma\lambda\mu} - \frac{g}{36} L_{\varrho_1\sigma_1\lambda_1} \epsilon^{\varrho_1\sigma_1\lambda_1}{}_\mu L_{\varrho_2\sigma_2\lambda_2} \epsilon^{\varrho_2\sigma_2\lambda_2\mu} \\
& + \frac{1}{16\alpha^2 + 4\beta^2} [3\beta \partial_{[\mu}(P_{\varrho]} - \frac{g}{6} L_{\kappa\lambda\theta} \epsilon^{\kappa\lambda\theta}{}_{\varrho]}) \partial^{[\mu}(P^{\varrho]} - \frac{g}{6} L_{\kappa\lambda\theta} \epsilon^{\kappa\lambda\theta\varrho]}) \\
& - 16\beta \partial_{[\mu}(P_{\varrho]} - \frac{g}{6} L_{\kappa\lambda\theta} \epsilon^{\kappa\lambda\theta}{}_{\varrho]}) K^{\mu\varrho} + 4\beta K_{\mu\varrho} K^{\mu\varrho} \\
& + 8\alpha e^\chi m^I (M^{-1})_{IJ} \partial_{[\mu}(P_{\varrho]} - \frac{g}{6} L_{\kappa\lambda\theta} \epsilon^{\kappa\lambda\theta}{}_{\varrho]}) J^{\mu\varrho J} \\
& - 8\alpha e^\chi m^I (M^{-1})_{IJ} K_{\mu\varrho} J^{\mu\varrho J} \\
& - \beta e^{2\chi} m^I (M^{-1})_{IJ} m^K (M^{-1})_{KL} J^J_{\mu\varrho} J^{\mu\varrho L}] + J^I_{\mu\varrho} J^{\mu\varrho J} (M^{-1})_{IJ} \\
& + \frac{1}{16\alpha^2 + 4\beta^2} \epsilon^{\mu\nu\varrho\sigma} [\alpha \partial_{[\mu}(P_{\nu]} - \frac{g}{6} L_{\kappa\lambda\theta} \epsilon^{\kappa\lambda\theta}{}_{\nu]}) \partial_{[\varrho}(P_{\sigma]} - \frac{g}{6} L_{\kappa\lambda\theta} \epsilon^{\kappa\lambda\theta}{}_{\sigma]}) \\
& - 8\alpha \partial_{[\mu}(P_{\nu]} - \frac{g}{6} L_{\kappa\lambda\theta} \epsilon^{\kappa\lambda\theta}{}_{\nu]}) K_{\varrho\sigma} - 4\alpha K_{\mu\nu} K_{\varrho\sigma} \\
& + \beta e^\chi m^I (M^{-1})_{IJ} \partial_{[\mu}(P_{\nu]} - \frac{g}{6} L_{\kappa\lambda\theta} \epsilon^{\kappa\lambda\theta}{}_{\nu]}) J^J_{\varrho\sigma} \\
& - 2\beta e^\chi m^I (M^{-1})_{IJ} K_{\mu\nu} J^J_{\varrho\sigma} \\
& - 3\alpha e^{2\chi} m^I (M^{-1})_{IJ} m^K (M^{-1})_{KL} J^J_{\mu\nu} J^L_{\varrho\sigma}].
\end{aligned}
\tag{3.2.54}
$$

Im Vergleich zur masselosen Theorie hat sich die gesamte Situation verändert. Während (3.1.12) als dualisierte Wirkung der masselosen Zweiform den kinetischen Term eines neuen Skalarfeldes a beschrieben hat, treten in der dualisierten Wirkung für die massive Theorie kinetische Terme für alle Vektorfelder auf. Da bereits in Abschnitt 3.2.2 festgestellt wurde, dass die Skalarfelder τ und $\mathcal{M}_{MN}$ die gleiche Form wie im masselosen Fall haben müssen, benötigt man diese Felder ebenso im massiven Fall. Dabei muss man berücksichtigen, dass der kinetische Term eines Skalarfeldes durch die Ableitung dieses Feldes gegeben ist und somit eine Einsform enthält. Um das Feld a und diesbezüglich seine Ableitung und damit den kinetischen Term einzuführen, bietet es sich an, das Feld P_μ proportional zur Ableitung von a zu definieren. Also definiere man die Proportionalität

$$P_\mu :\sim D_\mu a, \tag{3.2.55}$$

wobei $D_\mu a$ die kovariante Ableitung des Feldes a bezeichnet, jedoch hiermit noch keine Aussage darüber getroffen werden kann, ob nicht weitere Vektoren additiv an diese kovariante Ableitung koppeln. Definiert man nichtsdestoweniger (3.2.55), so sieht man, dass das erste Integral in (3.2.54)

$$\int d^4x \ \sqrt{-g} \ P_\mu P^\mu \sim \int d^4x \ \sqrt{-g} \ D_\mu a D^\mu a \tag{3.2.56}$$

tatsächlich den kinetischen Term des Skalarfeldes a beschreibt, so dass nach der Dualisierung für jedes Skalarfeld ein kinetischer Term auftritt.

3.2.4 Zweiformfelder der massiven $\mathcal{N} = 4$ Supergravitation

Nachdem in den letzten beiden Abschnitten die Strukturkonstanten $f_{\alpha MNP}$ und $\xi_{\alpha M}$ bestimmt sowie die Wirkung der massiven Zweiform dualisiert worden ist, muss berücksichtigt werden, dass in der Wirkung (3.2.7) ebenfalls Zweiformfelder auftreten, diese jedoch selbst keine kinetischen Terme in (3.2.8) besitzen. Setzt man die Ergebnisse (3.2.21) und (3.2.22) sowie (3.2.34) und (3.2.35) für $f_{\alpha MNP}$ und $\xi_{\alpha M}$ in den kinetischen Term (3.2.8) und in den topologischen Term (3.2.9) ein[17], so erhält man, wenn man zusätzlich (3.2.39) verwendet

$$\begin{aligned} S_{kin} &= \int d^4x\sqrt{-g}\Big[\frac{1}{2}R + \frac{1}{16}D_\mu\mathcal{M}_{MN}D^\mu\mathcal{M}^{MN} - \frac{1}{4Im(\tau)^2}\partial_\mu\tau\partial^\mu\tau^* \\ &- \frac{1}{4}Im(\tau)\mathcal{M}_{MN}H^{M+}_{\mu\nu}H^{\mu\nu N+}\Big] + \int d^4x\frac{1}{8}Re(\tau)\eta_{MN}\epsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}H^{M+}_{\mu\nu}H^{N+}_{\varrho\sigma} \end{aligned} \tag{3.2.57}$$

und

$$\begin{aligned} S_{top} = \int \quad &- \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\varrho\lambda}\Big[-f_{-MNP}H^{M-}_\mu H^{N+}_\nu\partial_\varrho H^{P-}_\lambda \\ &- \frac{1}{4}f_{-MNR}f_{-PQ}{}^R H^{M-}_\mu H^{N+}_\nu H^{P-}_\varrho H^{Q-}_\lambda \\ &- \frac{1}{4}f_{-MNP}B^{NP}_{\mu\nu}(2\partial_\varrho H^{M-}_\lambda - f_{-QR}{}^M H^{Q-}_\varrho H^{R-}_\lambda)\Big] \end{aligned} \tag{3.2.58}$$

mit elektrischer Feldstärke

$$\begin{aligned} H^{M+}_{\mu\nu} &= \partial_{[\mu}H^{M+}_{\nu]} - \frac{1}{2}f_{-NP}{}^M H^{N-}_{[\mu}H^{P+}_{\nu]} \\ &+ \frac{1}{4}f_-{}^M{}_{NP}B^{NP}_{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{3.2.59}$$

Da (3.2.54) keine Zweiformfelder mehr beinhaltet, ist es ebenso notwendig $B^{NP}_{\mu\nu}$ aus (3.2.57) und (3.2.58) zu entfernen, indem man die Euler-Lagrange Gleichung für $B^{NP}_{\mu\nu}$ verwendet. Damit lässt sich diese Zweiform durch alle

[17] Das Potential (3.2.10) braucht nicht berücksichtigt zu werden, da in diesem erstens keine Zweiformfelder auftreten und zweitens dieser vollständig verwendet wurde, um die Strukturkonstanten $f_{\alpha MNP}$ und $\xi_{\alpha M}$ zu bestimmen.

Felder, die bereits in (3.2.57) und (3.2.58) auftauchen, ersetzen.

Da keine Ableitung von $B^{NP}_{\mu\nu}$ in (3.2.8) und (3.2.9) auftritt, gilt $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\varrho B^{NP}_{\mu\nu})} \equiv 0$, so dass die Bewegungsgleichung in der Form $0 = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial B^{NP}_{\mu\varrho}}$ übrig bleibt, dessen Ausführung

$$\begin{aligned} 0 = & - \frac{1}{8} g^{\mu\nu} g^{\varrho\sigma} Im(\tau) \mathcal{M}_{M_1N_1} f_{-\ \ NP}^{\ M_1} \\ & \times \left(\partial_{[\nu} H^{N_1+}_{\sigma]} - \frac{1}{2} f_{-N_2P_2}{}^{N_1} H^{N_2-}_{[\nu} H^{P_2+}_{\sigma]} + \frac{1}{4} f_{-\ \ N_2P_2}^{\ N_1} B^{N_2P_2}_{\nu\sigma} \right) \\ & - \frac{1}{16} Re(\tau) \eta_{M_1N_1} \epsilon^{\mu\nu\varrho\sigma} f_{-\ \ NP}^{\ M_1} \\ & \times \left(\partial_{[\nu} H^{N_1+}_{\sigma]} - \frac{1}{2} f_{-N_2P_2}{}^{N_1} H^{N_2-}_{[\nu} H^{P_2+}_{\sigma]} + \frac{1}{4} f_{-\ \ N_2P_2}^{\ N_1} B^{N_2P_2}_{\nu\sigma} \right) \\ & - \frac{1}{8} \epsilon^{\mu\nu\varrho\sigma} f_{-MNP} (2\partial_\nu H^{M-}_\sigma - f_{-QR}{}^M H^{Q-}_\nu H^{P-}_\sigma) \end{aligned} \tag{3.2.60}$$

ergibt, die äquivalent ist zu

$$\begin{aligned} & f_{-\ \ N_2P_2}^{\ N_1} B^{N_2P_2}_{\nu\sigma} \left(-\frac{1}{32} g^{\mu\nu} g^{\varrho\sigma} Im(\tau) \mathcal{M}_{M_1N_1} - \frac{1}{64} Re(\tau) \eta_{M_1N_1} \epsilon^{\mu\nu\varrho\sigma} \right) \\ = & \ \frac{1}{8} \epsilon^{\mu\nu\varrho\sigma} \eta_{MM_1} (2\partial_\nu H^{M-}_\sigma - f_{-QR}{}^M H^{Q-}_\nu H^{P-}_\sigma) \\ + & \left(\frac{1}{8} g^{\mu\nu} g^{\varrho\sigma} Im(\tau) \mathcal{M}_{M_1N_1} + \frac{1}{16} Re(\tau) \eta_{M_1N_1} \epsilon^{\mu\nu\varrho\sigma} \right) \\ \times & \left(\partial_{[\nu} H^{N_1+}_{\sigma]} - \frac{1}{2} f_{-N_2P_2}{}^{N_1} H^{N_2-}_{[\nu} H^{P_2+}_{\sigma]} \right). \end{aligned} \tag{3.2.61}$$

Diese Gleichung kann gelöst werden, indem man beide Seiten mit

$$-\frac{1}{32} Im(\tau) \mathcal{M}^{M_1P_1} g_{\kappa\varrho} g_{\mu\lambda} - \frac{1}{64} Re(\tau) \eta^{M_1P_1} \epsilon_{\lambda\varrho\kappa\mu} \tag{3.2.62}$$

multipliziert, die Metrik $g^{\mu\nu}$ sowie $\epsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}$ kontrahiert und ausnutzt, dass η_{MN} eine Metrik ist, mit der $SO(6,22)$ Indizes bewegt werden können. Für die linke Seite von (3.2.61) ergibt sich damit

$$\begin{aligned} & f_{-\ \ N_2P_2}^{\ N_1} B^{N_2P_2}_{\nu\sigma} \left(-\frac{1}{32} g^{\mu\nu} g^{\varrho\sigma} Im(\tau) \mathcal{M}_{M_1N_1} - \frac{1}{64} Re(\tau) \eta_{M_1N_1} \epsilon^{\mu\nu\varrho\sigma} \right) \\ \times & \left(-\frac{1}{32} Im(\tau) \mathcal{M}^{M_1P_1} g_{\kappa\varrho} g_{\mu\lambda} - \frac{1}{64} Re(\tau) \eta^{M_1P_1} \epsilon_{\lambda\varrho\kappa\mu} \right) \\ = & \ f_{-\ \ N_2P_2}^{\ P_1} B^{N_2P_2}_{\lambda\kappa} \left(\frac{1}{1024} Im(\tau)^2 + \frac{1}{1024} Re(\tau)^2 \right) = \frac{1}{1024} f_{-\ \ N_2P_2}^{\ P_1} B^{N_2P_2}_{\lambda\kappa} |\tau|^2, \end{aligned} \tag{3.2.63}$$

wohingegen die rechte Seite von (3.2.61) nach der Multiplikation die Form

$$
\begin{aligned}
& \Big[\frac{1}{8}\epsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}\eta_{MM_1}(2\partial_\nu H^{M-}_\sigma - f_{-QR}{}^M H^{Q-}_\nu H^{P-}_\sigma) \\
+ & \left(\frac{1}{8}g^{\mu\nu}g^{\varrho\sigma}Im(\tau)\mathcal{M}_{M_1N_1} + \frac{1}{16}Re(\tau)\eta_{M_1N_1}\epsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}\right) \\
\times & \left(\partial_{[\nu}H^{N_1+}_{\sigma]} - \frac{1}{2}f_{-N_2P_2}{}^{N_1}H^{N_2-}_{[\nu}H^{P_2+}_{\sigma]}\right)\Big] \\
\times & \left(-\frac{1}{32}Im(\tau)\mathcal{M}^{M_1P_1}g_{\kappa\varrho}g_{\mu\lambda} - \frac{1}{64}Re(\tau)\eta^{M_1P_1}\epsilon_{\lambda\varrho\kappa\mu}\right) \\
= & \frac{1}{128}Re(\tau)\eta^{P_1}_M\left(\partial_{[\kappa}H^{M-}_{\lambda]} - \frac{1}{2}f_{-QR}{}^M H^{Q-}_{[\kappa}H^{R-}_{\lambda]}\right) \\
- & \frac{1}{256}Im(\tau)\mathcal{M}^{M_1P_1}\eta_{MM_1}\left(\partial_{[\nu}H^{M-}_{\sigma]} - \frac{1}{2}f_{-QR}{}^M H^{Q-}_{[\nu}H^{R-}_{\sigma]}\right)\epsilon_\mu{}^\varrho{}_\nu{}^\sigma \\
- & \frac{1}{256}|\tau|^2\left(\partial_{[\lambda}H^{P_1+}_{\kappa]} - \frac{1}{2}f_{-N_2P_2}{}^{P_1}H^{N_2-}_{[\lambda}H^{P_2+}_{\kappa]}\right)
\end{aligned}
\tag{3.2.64}
$$

ergibt. Löst man die resultierende Gleichung nach $f_-{}^M{}_{NP}B^{NP}_{\mu\nu}$ auf, so erhält man

$$
\begin{aligned}
f_-{}^M{}_{NP}B^{NP}_{\mu\nu} = & \frac{8Re(\tau)}{|\tau|^2}\left(\partial_{[\nu}H^{M-}_{\mu]} - \frac{1}{2}f_{-QR}{}^M H^{Q-}_{[\nu}H^{R-}_{\mu]}\right) \\
- & 4\partial_{[\mu}H^{M+}_{\nu]} + 2f_{-QR}{}^M H^{Q-}_{[\mu}H^{R+}_{\nu]} \\
- & \frac{4Im(\tau)}{|\tau|^2}\eta_{PN}\mathcal{M}^{NM}\left(\partial_{[\varrho}H^{P-}_{\sigma]} - \frac{1}{2}f_{-QR}{}^P H^{Q-}_{[\varrho}H^{R-}_\sigma\right)\epsilon_\mu{}^\varrho{}_\nu{}^\sigma .
\end{aligned}
\tag{3.2.65}
$$

Nun kann man (3.2.65) in (3.2.57) und (3.2.58) einsetzen und erhält einen kinetischen Term, der lautet

$$
\begin{aligned}
S_{kin} = & \int d^4x\sqrt{-g}\Big[\frac{1}{2}R + \frac{1}{16}D_\mu\mathcal{M}_{MN}D^\mu\mathcal{M}^{MN} - \frac{1}{4Im(\tau)^2}\partial_\mu\tau\partial^\mu\tau^* \\
- & \frac{Im(\tau)}{|\tau|^2}g^{\mu\nu}g^{\varrho\sigma}\mathcal{M}_{MN}\left(\partial_{[\varrho}H^{M-}_{\mu]} - \frac{1}{2}f_{-QR}{}^M H^{Q-}_{[\varrho}H^{R-}_{\mu]}\right) \\
\times & \left(\partial_{[\sigma}H^{N-}_{\nu]} - \frac{1}{2}f_{-QR}{}^N H^{Q-}_{[\sigma}H^{R-}_{\nu]}\right) \\
+ & \frac{Re(\tau)}{2|\tau|^2}\epsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}\eta_{MN}\left(\partial_{[\varrho}H^{M-}_{\mu]} - \frac{1}{2}f_{-QR}{}^M H^{Q-}_{[\varrho}H^{R-}_{\mu]}\right) \\
\times & \left(\partial_{[\sigma}H^{N-}_{\nu]} - \frac{1}{2}f_{-QR}{}^N H^{Q-}_{[\sigma}H^{R-}_{\nu]}\right)\Big],
\end{aligned}
\tag{3.2.66}
$$

sowie einen topologischen Term

$$
\begin{aligned}
S_{top} = \int \quad & - \quad \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\varrho\lambda}\Big[- f_{-MNP} H_\mu^{M-} H_\nu^{N+} \partial_\varrho H_\lambda^{P-} \\
& - \quad \frac{1}{4} f_{-MNR} f_{-PQ}{}^R H_\mu^{M-} H_\nu^{N+} H_\varrho^{P-} H_\lambda^{Q-} \\
& - \quad \eta_{MN} \left(\partial_{[\nu} H_{\lambda]}^{M-} - \frac{1}{2} f_{-QR}{}^M H_{[\nu}^{Q-} H_{\lambda]}^{R-} \right) \\
& \times \quad \left(\partial_{[\mu} H_{\varrho]}^{N+} - \frac{1}{2} f_{-QR}{}^N H_{[\mu}^{Q-} H_{\varrho]}^{R+} \right) \Big].
\end{aligned}
\tag{3.2.67}
$$

Definiert man nun noch die allgemeine Feldstärke für die magnetischen Vektoren H_μ^{M-} in der Art, dass

$$
G_{\mu\nu}^{M-} := \partial_{[\mu} H_{\nu]}^{M-} - \frac{1}{2} f_{-QR}{}^M H_{[\mu}^{Q-} H_{\nu]}^{R-} \tag{3.2.68}
$$

gesetzt wird, so lässt sich der kinetische Term (3.2.66) in die kanonische Form bringen

$$
\begin{aligned}
S_{kin} \quad = \quad & \int d^4x \sqrt{-g} \Big[\frac{1}{2} R + \frac{1}{16} D_\mu \mathcal{M}_{MN} D^\mu \mathcal{M}^{MN} - \frac{1}{4 Im(\tau)^2} \partial_\mu \tau \partial^\mu \tau^* \\
- \quad & \frac{Im(\tau)}{|\tau|^2} \mathcal{M}_{MN} G_{\mu\nu}^{M-} G^{\mu\nu N-} \Big] + \int d^4x \frac{Re(\tau)}{2|\tau|^2} \eta_{MN} \epsilon^{\mu\nu\varrho\sigma} G_{\mu\nu}^{M-} G_{\varrho\sigma}^{N-}.
\end{aligned}
\tag{3.2.69}
$$

Im topologischen Term (3.2.67) kann man im dritten Summanden das Distributivgesetz anwenden und schließlich alle Summanden zusammenfassen, wobei man sowohl die Antisymmetrie von $\epsilon^{\mu\nu\varrho\lambda}$ als auch f_{-MNP} ausnutzen kann, so dass sich der topologische Term ergibt zu

$$
\begin{aligned}
S_{top} = \int \quad & - \quad \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\varrho\lambda}\Big(f_{-MNP} H_\mu^{M-} H_\nu^{N+} \partial_\varrho H_\lambda^{P-} \\
& + \quad \frac{3}{4} f_{-MNR} f_{-PQ}{}^R H_\mu^{M-} H_\nu^{N+} H_\varrho^{P-} H_\lambda^{Q-} \Big).
\end{aligned}
\tag{3.2.70}
$$

Damit ist gezeigt, dass unter Ausnutzung der Bewegungsgleichung für $B_{\mu\nu}^{NP}$ dieses Feld aus (3.2.57) und (3.2.58) eliminiert werden kann, so dass man eine Wirkung erhält, die nur noch die Vektorfelder H_μ^{M+} und H_μ^{M-} enthält, wobei sich insbesondere der kinetische Term mit Hilfe der Definition (3.2.68) in eine kanonische Form bringen lässt.

Betrachtet man nun den kinetischen Term (3.2.69), so sieht man, dass dort keine elektrischen Vektoren, sondern nur noch magnetische Vektoren auftreten, wohingegen in (2.5.13) sowohl kinetische Terme für die elektrischen Vektoren F_μ^I und V_μ^a sowie den magnetischen Vektor $C_{\mu a}$ auftreten. Wie bereits in Abschnitt 3.2.3 gezeigt wurde, sind Zweiformen dual zu Einsformen und umgekehrt. Das lässt darauf schließen, dass es notwendig sein wird, die elektrischen Vektoren zu dualisieren, was zu Zweiformtermen führt, wobei bekannt ist, dass die Ableitung eines Vektors gerade durch eine Zweiform beschrieben wird. Nach dieser Dualisierung jedoch wird in der gesamten Wirkung (2.5.13) kein elektrischer Vektor mehr auftreten, so dass es weiterhin notwendig sein wird, die elektrischen Vektoren H_μ^{M+} aus dem topologischen Term (3.2.70) zu eleminieren.

Kapitel 4

Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Diplomarbeit ist die Reduktion einer sechsdimensionalen Supergravitation auf vier Dimensionen betrachtet worden. Die sechsdimensionale Theorie wurde in [12] hergeleitet, die eine zehndimensionale Theorie auf sechs Dimensionen kompaktifizierten. Da man allerdings nur vier Raumzeit Dimensionen beobachten kann, muss diese Theorie wiederum auf vier Dimensionen reduziert werden. Diese Aufgabe wurde bereits von K. Mujkic [14] betrachtet, der die sechsdimensionale Theorie auf einem zweidimensionalen Torus T^2 reduzierte. J. Schön und M. Weidner auf der anderen Seite leiteten die allgemeine Formulierung einer $\mathcal{N} = 4$ Supergravitation her [15]. Tatsächlich stimmt diese Formulierung nicht mit der aus [14] überein. Um diese Problematik zu lösen, spaltet man sie zuerst in zwei Teile auf. Zunächst betrachtet man die masselose Supergravitation. In der masselosen $\mathcal{N} = 4$ Theorie treten die elektrische Feldstärke $H^{M+}_{\mu\nu}$, die Skalare τ und $\mathcal{M}_{MN}$ sowie die Metrik η_{MN} auf, die man durch einen Vergleich mit der reduzierten Theorie bestimmen kann. Tatsächlich kommen in der $\mathcal{N} = 4$ Theorie weder Zweiformfelder noch magnetische Vektoren vor, während jedoch in der reduzierten Theorie die Zweiform $B_{\mu\nu}$ sowie der magnetische Vektor $C_{\mu a}$ auftauchen. Um diese beiden Felder zu eleminieren und nur Skalare sowie elektrische Vektoren zu bekommen, ist es deshalb notwendig gewesen, Dualisierungen durchzuführen. Dabei wurde $B_{\mu\nu}$ in das Skalarfeld a und der magnetische Vektor $C_{\mu a}$ in den elektrischen Vektor D^a_μ überführt, so dass es schließlich möglich gewesen ist, die reduzierte Theorie [14] mit dem Ausdruck für die $\mathcal{N} = 4$ Supergravitation zu vergleichen und damit die elektische Feldstärke, die Skalare und die Metrik dieser Theorie zu bestimmen. Nachdem man den masselosen Fall betrachtet hat, sind alle Massen eingeschaltet worden. Dies ist notwendig, da die $\mathcal{N} = 4$ Theorie im massiven Fall die Strukturkonstanten $f_{\alpha MNP}$ und $\xi_{\alpha M}$ enthält, welche proportional zu den Massen sind und welche deshalb mit Hilfe der masselosen Theorie nicht bestimmt werden konnten. Auf der anderen Seite tritt in der reduzierten Theorie zusätzlich ein Potential auf, mit dem es in der Tat möglich ist, diese Strukturkonstanten zu bestimmen. Danach sollte es möglich sein, die reduzierte massive Theorie mit dem allgemeinen Formalismus zu vergleichen und die eine Wirkung in der Form der anderen Wirkung darzustellen. Allerdings ist dieses Vorhaben nicht einfach durchzuführen. Genauso wie in der masselosen Theorie existiert in der reduzierten Theorie ein kinetischer Wirkungsterm für die Zweiform $B_{\mu\nu}$, welche auch im massiven Fall nicht in der allgemeinen Darstellung auftritt. Es bietet sich jedoch wie im masselosen Fall an, die Zweiform zu dualisieren. Allerdings ist im massiven Fall das duale Feld zu der Zweiform $B_{\mu\nu}$ kein skalares Feld mehr, sondern ein Vektor P_μ. Da der Feldgehalt in der masselosen und in der massiven Theorie übereinstimmen sollte, ist es notwendig, wie in der masselosen Theorie die kinetische Wirkung für das Feld a zu erhalten. Daraus konnte man folgern, dass der Vektor P_μ wenigstens proportional zu der kovarianten Ableitung $D_\mu a$ des Skalars a sein muss, wobei daraus nicht geschlossen werden kann, dass nicht noch andere Vektoren in P_μ auftreten. Durch diese Dualisierung tritt in der gesamten reduzierten Theorie keine Zweiform $B_{\mu\nu}$ auf, wohingegen in der $\mathcal{N} = 4$ Theorie zwar kein kinetischer Term, allerdings ein topologischer Term vorkommt, der Zweiformen enthält. Außerdem beinhaltet zusätzlich die allgemeine Feldstärke $H^{M+}_{\mu\nu}$ ebenfalls Zweiformen. Um diese aus der $\mathcal{N} = 4$ Wirkung zu entfernen, lassen sich die Euler-Lagrangschen Bewegungsgleichungen anwenden, so dass die auftretende Zweiform durch Vektoren und Skalare ausgedrückt werden kann. Führt man jedoch diese Berechnung durch, so zeigt sich, dass im kinetischen Term kein elektrischer Vektor, sondern nur noch magnetische Vektoren auftreten. Die einzigen elektrischen Vektoren, die noch vorhanden sind, tauchen linear im topologischen Term auf.

Insgesamt ist es also gelungen, die reduzierte Theorie im masselosen Fall mit der allgemeinen $\mathcal{N} = 4$ Theorie zu vergleichen, während es im massiven Fall nur möglich gewesen ist, die fehlenden Strukturkonstanten zu bestimmen, wobei immer noch die Aufgabe bleibt, die reduzierte Wirkung in der Form der $\mathcal{N} = 4$ Theorie zu schreiben.

Um den fehlenden Vergleich beider Wirkungsterme im massiven Fall zu vollenden, bleiben einige Rechenschritte übrig. Da in der $\mathcal{N} = 4$ Supergravitation nach Eliminierung der Zweiform nur noch kinetische Terme für magnetische Vektoren auftreten, muss die kinetische Wirkung der reduzierten Theorie wie im masselosen Fall dualisiert werden, so dass anstatt der elektrischen Vektoren nur noch magnetische Vektoren vorkommen. Dies würde aber bedeuten, dass in der reduzierten Wirkung gar keine elektrischen Vektoren, sondern nur noch magnetische Vektoren auftreten. Da jedoch im topologischen Term noch elektrische Vektoren vorhanden sind, muss man sich ebenso überlegen, wie diese eliminiert werden können. Nach diesen Schritten sollte es jedoch möglich sein, mit Hilfe der bestimmten Felder und der Strukturkonstanten beide Wirkungen miteinander zu vergleichen.

Anhang A

Konventionen und Notationen

Mathematische Symbole

Neben den üblichen mathematischen Symbolen wird in dieser Arbeit folgende Symbolik verwendet:

$:=$	ist definiert als,	(A.1)
$\equiv$	ist konstant gleich,	(A.2)
$\times$	wird benutzt, wenn sich ein Produkt über zwei Zeilen erstreckt,	(A.3)
$:\sim$	ist definiert, proportional zu sein zu.	(A.4)

Koordinaten

Da der Ausgangspunkt sechsdimensional ist, benötigt man zunächst sechsdimensionale Koordinaten der Form

$$\hat{x}^{\hat{\mu}} \in M_6, \ \hat{\mu} \in \{0, ...5\}, \tag{A.5}$$

wobei alle auftretenden Felder mit Hüten sechsdimensional sind.

Da es für die Reduktion von sechs auf vier Dimensionen notwendig sein wird, M_6 in eine beliebige vierdimensionale Mannigfaltigkeit M_4 und einen Torus T^2 zu zerlegen, kann man die sechsdimensionalen Koordinaten aufspalten in

$$\hat{x}^{\hat{\mu}} =: (x^\mu, y^a), \tag{A.6}$$

wobei $x^\mu \in M_4, \mu \in \{0, 1, 2, 3\}$, die vierdimensionalen und $y^a \in T^2$, $a \in \{4, 5\}$, die zweidimensionalen Koordinaten bezeichnen. Dementsprechend werden auch $\nu, \varrho, \sigma, \kappa, \lambda$ als vierdimensionale und b, c, d als zweidimensionale Indizes verwendet.

Treten Indizes in einem Produkt wiederholt auf, wird in jedem Fall über diese Indizes summiert, was explizit bedeutet

$$A_\mu B^\mu := \sum_{\mu=0}^{3} A_\mu B^\mu \tag{A.7}$$

für beliebige Vektoren A und B. (A.7) gilt auch in sechs und zwei Dimensionen sowie dann, wenn mehr als ein Index vorkommt.

Metriken

Die Signatur von M_6 ist $(-,+,+,+,+,+)$; die von M_4 und T^2 sind $(-,+,+,+)$ und $(+,+)$. Indizes werden durch die Metrik der jeweiligen Mannigfaltigkeit angehoben oder heruntergesetzt:

$$x_\mu := g_{\mu\nu} x^\nu. \tag{A.8}$$

Diese Regel gilt ebenso für den sechs- und zweidimensionalen Fall und auch dann, wenn mehr als ein Index involviert ist. Insbesondere ist

$$g_{\mu\nu} g^{\mu\varrho} = \delta_\nu^\varrho, \tag{A.9}$$

woraus man also folgern kann, dass $g^{\mu\varrho}$ gerade die Inverse von $g_{\mu\nu}$ ist.

Der Levi-Civita Tensor

In dieser gesamten Diplomarbeit wird der Levi-Civita Tensor in sechs, vier und zwei Dimensionen verwendet. In vier Dimensionen ist dieser Tensor definiert als

$$\epsilon^{0123} = +1, \tag{A.10}$$

wobei das Vorzeichen sich gerade dann ändert, wenn zwei Indizes vertauscht werden. Daraus folgt insbesondere, dass der Levi-Civita Tensor verschwindet, wenn mindestens zwei gleiche Indizes auftreten:

$$\epsilon^{\mu\nu\varrho\sigma} \equiv 0, \text{ wenn mindestens zwei Indizes gleich sind.} \tag{A.11}$$

Da die vierdimensionale Mannigfaltigkeit M_4 die Signatur $(-,+,+,+)$ besitzt, liefert dies insbesondere

$$\epsilon_{0123} = -1 \tag{A.12}$$

Um Indizes zu kontrahieren, werden die Formeln aus [2, 3] verwendet

$$\begin{aligned}
\epsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}\epsilon_{\mu\nu\varrho\sigma} &= -24, &\text{(A.13)}\\
\epsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}\epsilon_{\kappa\nu\varrho\sigma} &= -6g^{\mu}_{\kappa}, &\text{(A.14)}\\
\epsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}\epsilon_{\kappa\lambda\varrho\sigma} &= -2(g^{\mu}_{\kappa}g^{\nu}_{\lambda} - g^{\nu}_{\kappa}g^{\mu}_{\lambda}), &\text{(A.15)}\\
\epsilon^{\mu_1\mu_2\mu_3\sigma}\epsilon_{\nu_1\nu_2\nu_3\sigma} &= -\det\begin{pmatrix} g^{\mu_1}_{\nu_1} & g^{\mu_1}_{\nu_2} & g^{\mu_1}_{\nu_3} \\ g^{\mu_2}_{\nu_1} & g^{\mu_2}_{\nu_2} & g^{\mu_2}_{\nu_3} \\ g^{\mu_3}_{\nu_1} & g^{\mu_3}_{\nu_2} & g^{\mu_3}_{\nu_3} \end{pmatrix}. &\text{(A.16)}
\end{aligned}$$

Da die Struktur von M_6 $(-,+,+,+,+,+)$ ist, ergibt sich für sechs Dimensionen analog:

$$\begin{aligned}
\epsilon^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\varrho}\hat{\sigma}\hat{\kappa}\hat{\lambda}}\epsilon_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\varrho}\hat{\sigma}\hat{\kappa}\hat{\lambda}} &= -6!, &\text{(A.17)}\\
\epsilon^{\hat{\mu}_1\hat{\nu}\hat{\varrho}\hat{\sigma}\hat{\kappa}\hat{\lambda}}\epsilon_{\hat{\mu}_2\hat{\nu}\hat{\varrho}\hat{\sigma}\hat{\kappa}\hat{\lambda}} &= -5!\hat{g}^{\hat{\mu}_1}_{\hat{\mu}_2}, &\text{(A.18)}\\
\epsilon^{\hat{\mu}_1\hat{\nu}_1\hat{\varrho}\hat{\sigma}\hat{\kappa}\hat{\lambda}}\epsilon_{\hat{\mu}_2\hat{\nu}_2\hat{\varrho}\hat{\sigma}\hat{\kappa}\hat{\lambda}} &= -4!(\hat{g}^{\hat{\mu}_1}_{\hat{\mu}_2}\hat{g}^{\hat{\nu}_1}_{\hat{\nu}_2} - \hat{g}^{\hat{\mu}_1}_{\hat{\nu}_2}\hat{g}^{\hat{\nu}_1}_{\hat{\mu}_2}), &\text{(A.19)}\\
\epsilon^{\hat{\mu}_1\hat{\nu}_1\hat{\varrho}_1\hat{\sigma}\hat{\kappa}\hat{\lambda}}\epsilon_{\hat{\mu}_2\hat{\nu}_2\hat{\varrho}_2\hat{\sigma}\hat{\kappa}\hat{\lambda}} &= -3!\det\begin{pmatrix} \hat{g}^{\hat{\mu}_1}_{\hat{\mu}_2} & \hat{g}^{\hat{\mu}_1}_{\hat{\nu}_2} & \hat{g}^{\hat{\mu}_1}_{\hat{\varrho}_2} \\ \hat{g}^{\hat{\nu}_1}_{\hat{\mu}_2} & \hat{g}^{\hat{\nu}_1}_{\hat{\nu}_2} & \hat{g}^{\hat{\nu}_1}_{\hat{\varrho}_2} \\ \hat{g}^{\hat{\varrho}_1}_{\hat{\mu}_2} & \hat{g}^{\hat{\varrho}_1}_{\hat{\nu}_2} & \hat{g}^{\hat{\varrho}_1}_{\hat{\varrho}_2} \end{pmatrix}. &\text{(A.20)}
\end{aligned}$$

Da der Torus T^2 jedoch die Struktur $(+,+)$ besitzt, ergeben sich leicht andere Relationen. Auf der einen Seite gilt $\epsilon_{45} = \epsilon^{45} = 1$ und auf der anderen Seite gilt für die Kontraktionsregeln:

$$\begin{aligned}
\epsilon^{ab}\epsilon_{ab} &= 2, &\text{(A.21)}\\
\epsilon^{ab}\epsilon_{ac} &= \delta^{b}_{c}. &\text{(A.22)}
\end{aligned}$$

Anhang B

$SO(6,22)$ Metrik

In (3.1.45) wurde eine Matrix η_{MN} definiert, wobei in (3.1.4) gefordert wurde, dass diese Metrik eine $SO(6,n)$ Metrik ist, wobei bei der Reduktion von (2.1.2) ein $n = 22$ Vektormultiplett auftaucht. Deshalb wird hier gezeigt, dass diese definierte Matrix η_{MN} tatsächlich als $SO(6,22)$ Metrik verwendet werden kann. Zu diesem Zweck wird in diesem Anhang klar gemacht, dass man die Matrix η_{MN}, wie sie in (3.1.45) definiert worden ist, schreiben kann als

$$\eta_{MN} = \mathrm{diag}(-1,-1,-1,-1,-1,-1,+1,....,+1) \tag{B.1}$$

oder äquivalent, dass η_{MN} den Eigenwert -1 sechs Mal und den Eigenwert $+1$ 22 Mal besitzt. Um die Eigenwerte berechnen zu können, wird die charakteristische Gleichung gelöst

$$0 = \det(t \cdot E_{28} - \eta), \tag{B.2}$$

wobei E_{28} die 28×28 Einheitsmatrix bezeichnet, die in Blöcke der Form

$$E_{28} = \begin{pmatrix} E_{24} & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & E_2 \end{pmatrix} \tag{B.3}$$

aufgespalten werden kann.

Setzt man diese Matrix in (B.2) ein und benutzt Definition (3.1.45), erhält man die Gleichung

$$0 = \det \begin{pmatrix} t \cdot E_{24} - L_{IJ} & 0 & 0 \\ 0 & t \cdot E_2 & \epsilon_{ad} \\ 0 & -\epsilon_{cb} & t \cdot E_2 \end{pmatrix}, \tag{B.4}$$

wobei $t \cdot A, A \in \mathbb{R}^{M \times N}$, das übliche Produkt eines Skalars $t \in \mathbb{R}$ mit einer Matrix bezeichne. Da die Matrix, von der die Determinante berechnet wird, blockdiagonal ist, kann die Determinante folgendermaßen aufgespalten werden:

$$0 = \det(t \cdot E_{24} - L_{IJ}) \det \begin{pmatrix} t \cdot E_2 & \epsilon_{ad} \\ -\epsilon_{cb} & t \cdot E_2 \end{pmatrix}, \tag{B.5}$$

so dass man zwei Gleichungen der Form

$$0 = \det(t \cdot E_{24} - L_{IJ}), \tag{B.6}$$

$$0 = \det \begin{pmatrix} t \cdot E_2 & \epsilon_{ad} \\ -\epsilon_{cb} & t \cdot E_2 \end{pmatrix} \tag{B.7}$$

erhält. Dabei ist Gleichung (B.6) gerade die Eigenwertgleichung für L_{IJ}, wobei man von (2.1.7) weiß, dass L_{IJ} eine Metrik mit Signatur $(4, 20)$ ist, so dass der Eigenwert -1 vier Mal und der Eigenwert $+1$ 20 Mal auftritt. Damit muss nur noch Gleichung (B.7) untersucht werden. Schreibt man diese Gleichung aus, so bekommt man

$$0 = \det \begin{pmatrix} t & 0 & 0 & 1 \\ 0 & t & -1 & 0 \\ 0 & -1 & t & 0 \\ 1 & 0 & 0 & t \end{pmatrix}. \tag{B.8}$$

Außerdem kann die Determinante ausgeschrieben werden, so dass man die folgende biquadratische Gleichung erhält:

$$0 = t^4 - 2t^2 + 1, \tag{B.9}$$

dessen Lösungen die Eigenwerte $+1$ und -1 je zweimal ergibt. Also kann η_{MN} tatsächlich so diagonalisiert werden, dass sich die Form (B.1) ergibt. Damit wurde gezeigt, dass η_{MN} tatsächlich als $SO(6, 22)$ Metrik verwendet werden kann.

Anhang C

Dualisierung einer massiven Zweiform

In diesem Kapitel wird die Dualisierung einer massiven Zweiform vorgestellt, wobei eine vergleichbare Rechnung bereits in [11] durchgeführt wurde.In etwas allgemeinerer Form lautet die 1st *order* Lagrangedichte

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 &= \frac{1}{12}e^{-2\Lambda}(H_{\mu\varrho\kappa}+L_{\mu\varrho\kappa})(H^{\mu\varrho\kappa}+L^{\mu\varrho\kappa}) \\ &+ \frac{1}{4}e^{\chi}(2m^I B_{\mu\varrho}+J^I_{\mu\varrho})(2m^J B^{\mu\varrho}+J^{\mu\varrho J})(M^{-1})_{IJ} \\ &+ \epsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}\left(B_{\mu\nu}K_{\varrho\sigma}+\alpha B_{\mu\nu}B_{\varrho\sigma}\right), \end{aligned} \tag{C.1}$$

wobei Λ, χ und α skalare Funktionen, $L_{\mu\nu\varrho}$ eine Dreiform und $J^I_{\mu\varrho}$ sowie $K_{\varrho\sigma}$ antisymmetrische Zweiformen sind und die Felder $H_{\mu\varrho\kappa}$ und $B_{\mu\nu}$ als unabhängig voneinander behandelt werden. Die Tatsache, dass $H_{\mu\varrho\kappa}$ als Ableitung von $B_{\mu\nu}$ geschrieben werden kann, wird durch die Bewegungsgleichungen ausgedrückt werden. Zu diesem Zweck teilt man (C.1) in der folgenden Form auf:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 = &- \frac{1}{12}e^{-2\Lambda}(H_{\mu\varrho\kappa}+L_{\mu\varrho\kappa})(H^{\mu\varrho\kappa}+L^{\mu\varrho\kappa}) \\ &+ \frac{1}{6}e^{-2\Lambda}(\partial_\kappa B_{\mu\varrho}+\text{c.p.}+L_{\mu\varrho\kappa})(H^{\mu\varrho\kappa}+L^{\mu\varrho\kappa}) \\ &+ \frac{1}{4}e^{\chi}(2m^I B_{\mu\varrho}+J^I_{\mu\varrho})(2m^J B^{\mu\varrho}+J^{\mu\varrho J})(M^{-1})_{IJ} \\ &+ \epsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}\left(B_{\mu\nu}K_{\varrho\sigma}+\alpha B_{\mu\nu}B_{\varrho\sigma}\right). \end{aligned} \tag{C.2}$$

Verwendet man die Bewegungsgleichung $0=\frac{\partial\mathcal{L}_2}{\partial H_{\nu\sigma\lambda}}$ für das Feld $H_{\mu\nu\varrho}$, sieht man sofort, dass sichergestellt wird, dass H als Ableitung von B geschrieben werden kann.

Die Euler-Lagrange Gleichung für $B_{\mu\nu}$ lautet

$$0 = \partial_\kappa \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial(\partial_\kappa B_{\mu\varrho})} - \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial B_{\mu\varrho}}. \tag{C.3}$$

Wendet man diese Gleichung auf (C.2) an, erhält man die folgende Gleichung

$$\begin{aligned} & 2e^\chi m^I m^J (M^{-1})_{IJ} g^{\mu\nu} g^{\varrho\sigma} B_{\nu\sigma} - 2\epsilon^{\mu\nu\varrho\sigma} \alpha B_{\nu\sigma} \\ = \; & \partial_\kappa \left(\frac{1}{2} e^{-2\Lambda} \left(H^{\mu\varrho\kappa} + L^{\mu\varrho\kappa} \right) \right) + \epsilon^{\mu\nu\varrho\sigma} K_{\nu\sigma} - e^\chi m^I (M^{-1})_{IJ} J^{\mu\varrho J}. \end{aligned} \tag{C.4}$$

Zur besseren Lesbarkeit werden außerdem

$$\begin{aligned} e^\chi m^I (M^{-1})_{IJ} m^J &=: \beta, & \text{(C.5)} \\ \frac{1}{2} e^{-2\Lambda} &=: g, & \text{(C.6)} \\ H^{\mu\varrho\kappa} + L^{\mu\varrho\kappa} &=: G^{\mu\varrho\kappa} & \text{(C.7)} \end{aligned}$$

definiert. Damit kann (C.4) geschrieben werden als

$$(2\beta g^{\mu\nu} g^{\varrho\sigma} - 2\alpha\epsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}) B_{\nu\sigma} = \partial_\kappa (g G^{\mu\varrho\kappa}) + \epsilon^{\mu\nu\varrho\sigma} K_{\nu\sigma} + e^\chi m^I (M^{-1})_{IJ} J^{\mu\varrho J}. \tag{C.8}$$

Um diese Gleichung nach $B_{\nu\sigma}$ aufzulösen, werden beide Seiten mit $(\beta g_{\mu\kappa} g_{\varrho\lambda} + \alpha\epsilon_{\lambda\varrho\kappa\mu})$ multipliziert, so dass man nach Ausnutzung der Kontraktionsregeln für $g_{\mu\nu}$ und $\epsilon_{\mu\nu\varrho\sigma}$

$$\begin{aligned} (2\beta^2 + 8\alpha^2) B_{\kappa\lambda} &= (\partial_\kappa (g G^{\mu\varrho\kappa}) + \epsilon^{\mu\nu\varrho\sigma} K_{\nu\sigma} + e^\chi m^I (M^{-1})_{IJ} J^{\mu\varrho J}) \\ &\times (\beta g_{\mu\kappa} g_{\varrho\lambda} + \alpha\epsilon_{\lambda\varrho\kappa\mu}) \end{aligned} \tag{C.9}$$

erhält oder äquivalent dazu

$$B_{\kappa\lambda} = \frac{(\partial_\kappa (g G^{\mu\varrho\kappa}) + \epsilon^{\mu\nu\varrho\sigma} K_{\nu\sigma} + e^\chi m^I (M^{-1})_{IJ} J^{\mu\varrho J})(\beta g_{\mu\kappa} g_{\varrho\lambda} + \alpha\epsilon_{\lambda\varrho\kappa\mu})}{(2\beta^2 + 8\alpha^2)}. \tag{C.10}$$

Nun ist bekannt, dass in vier Dimensionen eine p-Form Hodge dual zu einer $(p-4)$-Form ist. Insbesondere kann man einen Ansatz machen, der die Dreiform $G_{\mu\varrho\kappa}$ mit einem Vektorfeld P_σ verbindet:

$$g G_{\mu\varrho\kappa} =: P_\sigma \epsilon_{\mu\varrho\kappa}{}^\sigma. \tag{C.11}$$

Setzt man diesen Ansatz in (C.10) ein, bekommt man einen Ausdruck für $B_{\kappa\lambda}$, der nicht mehr von der Dreiform $G_{\mu\varrho\kappa}$, sondern nur noch vom dualen Vektor P_σ abhängt:

$$
\begin{aligned}
B_{\kappa\lambda} &= \frac{(\partial_\kappa(P_\sigma \epsilon^{\mu\varrho\kappa\sigma}) + \epsilon^{\mu\nu\varrho\sigma} K_{\nu\sigma} + e^\chi m^I (M^{-1})_{IJ} J^{\mu\varrho J})((\beta g_{\mu\kappa} g_{\varrho\lambda} + \alpha \epsilon_{\lambda\varrho\kappa\mu}))}{(2\beta^2 + 8\alpha^2)} \qquad \text{(C.12)} \\
&= \frac{\frac{1}{2}\beta \partial_{[\kappa}(P_{\sigma]} \epsilon_{\kappa\lambda}{}^{\kappa\sigma}) + \beta \epsilon_\kappa{}^\nu{}_\lambda{}^\sigma K_{\nu\sigma} + \beta e^\chi m^I (M^{-1})_{IJ} J^J_{\kappa\lambda}}{(2\beta^2 + 8\alpha^2)} \\
&+ \frac{2\alpha \partial_{[\kappa} P_{\lambda]} - 4\alpha K_{\kappa\lambda} + \alpha e^\chi m^I (M^{-1})_{IJ} J^{\mu\varrho J} \epsilon_{\lambda\varrho\kappa\mu}}{(2\beta^2 + 8\alpha^2)}. \qquad \text{(C.13)}
\end{aligned}
$$

Mit diesem Ausdruck für $B_{\kappa\lambda}$ ist es schließlich möglich (C.1) zu dualisieren, indem man (C.13) einsetzt. Die dualisierte Wirkung lautet

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{2,dual} = &- \frac{1}{g} P_\mu P^\mu \\
&+ \frac{1}{16\alpha^2 + 4\beta^2}\Big[3\beta \partial_{[\mu} P_{\varrho]} \partial^{[\mu} P^{\varrho]} - 16\beta \partial_{[\mu} P_{\varrho]} K^{\mu\varrho} + 4\beta K_{\mu\varrho} K^{\mu\varrho} \\
&+ 8\alpha e^\chi m^I (M^{-1})_{IJ} \partial_{[\mu} P_{\varrho]} J^{\mu\varrho J} - 8\alpha e^\chi m^I (M^{-1})_{IJ} K_{\mu\varrho} J^{\mu\varrho J} \\
&- \beta e^{2\chi} m^I (M^{-1})_{IJ} m^K (M^{-1})_{KL} J^J_{\mu\varrho} J^{\mu\varrho L}\Big] + J^I_{\mu\varrho} J^{\mu\varrho J} (M^{-1})_{IJ} \\
&+ \frac{1}{16\alpha^2 + 4\beta^2} \epsilon^{\mu\nu\varrho\sigma} \Big[\alpha \partial_{[\mu} P_{\nu]} \partial_{[\varrho} P_{\sigma]} - 8\alpha \partial_{[\mu} P_{\nu]} K_{\varrho\sigma} - 4\alpha K_{\mu\nu} K_{\varrho\sigma} \\
&+ \beta e^\chi m^I (M^{-1})_{IJ} \partial_{[\mu} P_{\nu]} J^J_{\varrho\sigma} - 2\beta e^\chi m^I (M^{-1})_{IJ} K_{\mu\nu} J^J_{\varrho\sigma} \\
&- 3\alpha e^{2\chi} m^I (M^{-1})_{IJ} m^K (M^{-1})_{KL} J^J_{\mu\nu} J^L_{\varrho\sigma}\Big]. \qquad \text{(C.14)}
\end{aligned}
$$

In [11] wurde die Dualisierung einer massiven Zweiform unter der einfacheren Voraussetzung $J^I_{\mu\nu} \equiv 0$ betrachtet. Vergleicht man tatsächlich (C.14) unter der Bedingung $J^I_{\mu\nu} \equiv 0$ mit dem dort berechneten Ergebnis, so sieht man, dass beide Resultate übereinstimmen. (C.14) jedoch besitzt eine deutlich kompliziertere Form, die durch das Auftreten der Zweiform $J^I_{\mu\nu}$ begründet ist. Dies liegt daran, dass dieses Feld im kinetischen Term (C.1) und somit auch im Ausdruck (C.13) für $B_{\kappa\lambda}$ auftritt, so dass die Skalare α und β sowohl mit als auch ohne $\epsilon_{\mu\nu\varrho\sigma}$ auftreten.

Schließlich muss man berücksichtigen, dass P_μ dual zur Dreiform $G_{\mu\varrho\kappa}$, die gemäß Definition (C.7) aus $H_{\mu\nu\varrho}$ und $L_{\mu\varrho\kappa}$ besteht, angesetzt worden ist. Da $L_{\mu\varrho\kappa}$ aus weiteren Einsformen und deren Ableitungen besteht, ist es wünschenswert, dass $L_{\mu\varrho\kappa}$ in der dualisierten Wirkung auftritt, oder entsprechend, dass nur eine Dualisierung bezüglich des Feldes $H_{\mu\nu\varrho}$ stattfindet.

Um dies zu erreichen, lässt sich (C.11) nach P_σ auflösen und nachträglich $-\frac{g}{6}H_{\mu\varrho\kappa}\epsilon^{\mu\varrho\kappa\lambda}$ als dualer Vektor definieren. Dies ist äquivalent dazu, dass man die Umdefinition

$$P^\lambda \to P^\lambda - \frac{g}{6}L_{\mu\varrho\kappa}\epsilon^{\mu\varrho\kappa\lambda} \tag{C.15}$$

vornimmt, die man in (C.14) einsetzen kann, so dass man schließlich die dualisierte Wirkung einer massiven Zweiform erhält:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{2,dual} = & - \frac{1}{g}P_\mu P^\mu + \frac{1}{3}P_\mu L_{\varrho\sigma\lambda}\epsilon^{\varrho\sigma\lambda\mu} - \frac{g}{36}L_{\varrho_1\sigma_1\lambda_1}\epsilon^{\varrho_1\sigma_1\lambda_1}{}_\mu L_{\varrho_2\sigma_2\lambda_2}\epsilon^{\varrho_2\sigma_2\lambda_2\mu} \\
& + \frac{1}{16\alpha^2+4\beta^2}[3\beta\partial_{[\mu}(P_{\varrho]} - \frac{g}{6}L_{\kappa\lambda\theta}\epsilon^{\kappa\lambda\theta}{}_{\varrho]})\partial^{[\mu}(P^{\varrho]} - \frac{g}{6}L_{\kappa\lambda\theta}\epsilon^{\kappa\lambda\theta\varrho]}) \\
& - 16\beta\partial_{[\mu}(P_{\varrho]} - \frac{g}{6}L_{\kappa\lambda\theta}\epsilon^{\kappa\lambda\theta}{}_{\varrho]})K^{\mu\varrho} + 4\beta K_{\mu\varrho}K^{\mu\varrho} \\
& + 8\alpha e^\chi m^I(M^{-1})_{IJ}\partial_{[\mu}(P_{\varrho]} - \frac{g}{6}L_{\kappa\lambda\theta}\epsilon^{\kappa\lambda\theta}{}_{\varrho]})J^{\mu\varrho J} \\
& - 8\alpha e^\chi m^I(M^{-1})_{IJ}K_{\mu\varrho}J^{\mu\varrho J} \\
& - \beta e^{2\chi}m^I(M^{-1})_{IJ}m^K(M^{-1})_{KL}J^J_{\mu\varrho}J^{\mu\varrho L}] + J^I_{\mu\varrho}J^{\mu\varrho J}(M^{-1})_{IJ} \\
& + \frac{1}{16\alpha^2+4\beta^2}\epsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}[\alpha\partial_{[\mu}(P_{\nu]} - \frac{g}{6}L_{\kappa\lambda\theta}\epsilon^{\kappa\lambda\theta}{}_{\nu]})\partial_{[\varrho}(P_{\sigma]} - \frac{g}{6}L_{\kappa\lambda\theta}\epsilon^{\kappa\lambda\theta}{}_{\sigma]}) \\
& - 8\alpha\partial_{[\mu}(P_{\nu]} - \frac{g}{6}L_{\kappa\lambda\theta}\epsilon^{\kappa\lambda\theta}{}_{\nu]})K_{\varrho\sigma} - 4\alpha K_{\mu\nu}K_{\varrho\sigma} \\
& + \beta e^\chi m^I(M^{-1})_{IJ}\partial_{[\mu}(P_{\nu]} - \frac{g}{6}L_{\kappa\lambda\theta}\epsilon^{\kappa\lambda\theta}{}_{\nu]})J^J_{\varrho\sigma} \\
& - 2\beta e^\chi m^I(M^{-1})_{IJ}K_{\mu\nu}J^J_{\varrho\sigma} \\
& - 3\alpha e^{2\chi}m^I(M^{-1})_{IJ}m^K(M^{-1})_{KL}J^J_{\mu\nu}J^L_{\varrho\sigma}].
\end{aligned} \tag{C.16}$$

Setzt man neben $J^I_{\mu\nu} \equiv 0$ auch $L_{\mu\nu\varrho} \equiv 0$, so geht (C.16) tatsächlich in die Form über, die in [11] untersucht worden ist.

Literaturverzeichnis

[1] A. Einstein, Über die spezielle und allgemeine Relativitätstheorie, Springer (1988)

[2] L. D. Landau und E. M. Lifschitz, Lehrbuch der Theoretischen Physik II, Klassische Feldtheorie, Verlag Harri Deutsch (1997)

[3] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, An introduction to quantum field theory, Westview Press (1995)

[4] P.C. West, Introduction to supersymmetry and supergravity, World Scientific Pub Co (1986)

[5] C. Rovelli, Loop quantum gravity, http://relativity.livingreviews.org/Articles/lrr-2008-5/ (2008)

[6] A. Connes and M. Marcolli, Noncommutative geometry, quantum fields and motives, http://www.alainconnes.org/en/downloads.php (2008)

[7] A. Connes, Noncommutative geometry, Academic Press, London and San Diego (1994)

[8] M.B. Green, J.H. Schwarz and E. Witten, Superstring theory, Volume I, Introduction, Cambridge University Press (1987)

[9] M. J. Duff, Kaluza-Klein theory in perspective, Proceedings of the Symposium The Oskar Klein Centenary. Singapore: World Scientific. pp. 2235, hep - th/9410046 (1994)

[10] O'Raifeartaigh and N. Straumann, Early history of gauge theories and Kaluza-Klein theories, with a glance at recent developments, Rev. Mod. Phys., 72: 1 - 23, hep - th/9810524 (2000)

[11] J. Louis and A. Micu, Type II theories compactified on Calabi–Yau threefolds in the presence of background fluxes, Nucl. Phys., B635: 395 - 431 (2002)

[12] M. Haack, J. Louis and H. Singh, Massive Type IIA Theory on K3. JHEP, 04:040 (2001)

[13] T. Danckaert and J. Louis, Type IIA orientifold compactification on $SU(2)$-structure manifolds, 0911.5697 [hep-th] (2009)

[14] K. Mujkic, Kaluza-Klein Reduktion einer massiven D = 6 Supergravitationstheorie auf einem Torus T^2, http://www.desy.de/uni-th/stringth/Works/ (2008)

[15] J. Schön and M. Weidner, Gauged $\mathcal{N} = 4$ supergravities, JHEP 0605:034 hep - th/0602024 (2006)

[16] H. Heuser, Lehrbuch der Analysis, Band II, Teubner Verlag (2004)

[17] A. Sen, String string duality conjecture in six dimensions and charged solitonic strings. Nucl. Phys., B450:103 (1995)

[18] J. Maharana and J. H. Schwarz, Noncompact symmetries in string theory, Nucl. Phys., B:390: 3 - 32, hep - th/9207016 (1992)

[19] W. Greiner und J. Reinhard, Theoretische Physik 7, Quantenelektrodynamik, Verlag Harri Deutsch (1995)

[20] E. Cremmer, J. Scherk and S. Ferrara, $SU(4)$ invariant supergravity theory, Phys. Lett. B74: 61 (1978)

[21] M. de Roo, Matter coupling in $N = 4$ supergravity, Nucl. Phys., B255: 515 (1985)

[22] S. Weinberg, Gravitation and cosmology, John Wiley and Sons (1972)

[23] S. Weinberg, The quantum theory of fields II, Modern Applications, Cambridge University Press (2005)

[24] M.F. Sohnius, Introducing supersymmetry, Phys.Rept.128:39-204 (1985)

[25] M. J. Duff, James T. Liu and J. Rahmfeld, Four dimensional string / string / string triality, Nucl. Phys., B459:125, hep - th/9508094 (1995)

[26] M. Cvetič, H Lü and C.N. Pope, Consistent Kaluza-Klein sphere reductions, Phys. Rev. D 62, 064028, hep - th/00032586 (2000)

Danksagung

Als erstes möchte ich Herrn Prof. Dr. Jan Louis danken, dass er mich als Kieler Student als Diplomand angenommen und mir dieses interessante Thema gegeben hat. Außerdem möchte ich ihm dafür danken, dass ich bei Problemen immer zu ihm gehen konnte und er immer einen guten Ratschlag gegeben hat.

Des Weiteren danke ich Herrn Prof. Dr. Gerhard Grensing dafür, dass er die Zweitkorrektur in Kiel übernommen hat und ich mich bei Problemen immer bei ihm melden konnte. Außerdem danke ich ihm für den interessanten Vorlesungszyklus "Nichtkommutative Geometrie", bei dem ich viel über grundlegende Fragen der Physik lernen konnte.

In gleichem Maße bin ich Frau Prof. Dr. Barbara Schrempp, die immer an meine Fähigkeiten geglaubt und die mir Herrn Louis empfohlen hat, sowie Herrn Prof. Dr. Eckhard Pehlke, der mich bei meinem Wechsel nach Hamburg beraten hat, zu Dank verpflichtet.

In Dankbarkeit für ihre uneingeschränkte Unterstützung, ohne die mein Studium nicht möglich gewesen wäre, danke ich meinen Eltern Gisela und Joachim Köhn sowie meiner Großmutter Hella Köhn, die mir überdies immer finanziell zur Seite stand.

Meinen Kommilitonen, insbesondere Björn Rahn, Klaus Seiffert, Michael Buttgereit, Henning Bruhn, Christoph Nölle, Torben Reichstein sowie Lars von der Wense, danke ich dafür, dass sie das Studium erträglicher gemacht haben sowie dass ich immer viele interessante, physikalische wie nichtphysikalische Gespräche mit ihnen führen konnte.

Außerdem danke ich Björn Engler und Michael Wende dafür, dass sie immer an mich geglaubt haben und mir gut zugesprochen haben, wenn es nicht immer so lief, wie es laufen sollte, und mir den Glauben an meine Fähigkeiten wiedergegeben haben. Im gleichen Kontext sind auch Sören Engler, Leif und Sven Engler, Marijana Wende, Alexander Schumacher, Leif Bünning, Dennis Hauschild, Patrick Haller, Yasmin Bösherz und Jule Tittelbach zu nennen.

Erklärung

Ich versichere, diese Arbeit selbstständig und nur unter Benutzung der angegebenen Hilfsmittel angefertigt zu haben. Ich gestatte die Veröffentlichung dieser Arbeit.

Kiel, den 26. April 2010,

Christoph Köhn